# 序 言

本書是適用於我國大學現行教學大綱的一本教科書。鑒於函數理論對於培養數學家日趨重要，我在本書中(用小型鉛字排印)放入了一系列超出大綱範圍的問題。但爲了不使本書篇幅過大起見，我還不得不放棄了很多重要的材料：例如微分的理論，更一般的積分理論，若干接觸到複變函數論的問題等等。我準備另寫一些專門的書來討論這些問題。

在大學中，實變函數論是在三年級開始講授的。所以我假定讀者對解析學的基本概念已能靈活掌握。凡在任何一本詳盡的微積分書中講到的一些概念，例如無理數、極限理論、連續函數的最重要的性質，微分、積分、級數等都假定已爲讀者所熟知。

書中大部分的章後都附有習題。這些習題一般說來是相當難的，有時需要經過很大的努力才能解決。但是對於要想切實地通曉這門知識的讀者，我仍然建議他們務必盡最大的努力至少解決其中一部分的問題。

本書是我以前所寫的"實變函數論的基礎"所改編的，該書於 1941 年在列寧格勒大學出版，因本數不多，不久卽行銷完。我早有意於再版，並且這個願望已經部分地實現了，這就是"拉强西卡學派"出版部曾用烏克蘭譯文刊印了該書。譯者是基也輔斯克大學的副教授 С. И. 助賀維次基。他添加了各種細緻的補充，並且還增加了原書中所沒有的三章，講述高度空間的點集和多變函數論等問題。在本版中，除了包含上述的補充而外，又添加了很多新的材料：汎函數解析初步（按照最近頒

佈的綜合大學教學大綱所要求的範圍)、半連續函數理論、測度問題的不可解性,以及有關在積分號下取極限的詳細討論等等。

在本書中,讀者可以找到我國學者所發明的許多結果(Д. Ф. 葉果洛夫和 Н. Н. 盧洵關於可測函數的基本定理,С. Н. 褒恩斯坦的多項式,Н. Н. 盧洵和 А. Н. 柯爾莫廓洛夫關於三角級數的定理,П. И. 羅曼諾夫斯基和 Д. К. 法捷耶夫關於奇異積分的定理等等)。但是這些結果遠不能代表俄羅斯數學家在實變函數論發展中的全部貢獻,因爲本書所說的多是函數論中較初等的部分,而蘇聯學者對這門學問的研究已經達到很高深的地步。爲了給讀者一個較完整的關於實際情況的輪廓起見,我在本書末章簡括地講了些俄國和蘇聯數學家在實變函數論方面的貢獻。

Е. Я. 列滅士教授曾經對於上述的烏克蘭譯本加以評論並且提出了一系列寶貴的意見,我在從事於新版的修正時也採納了這些意見。此外,我很感激 Н. К. 巴里教授、Д. К. 法捷耶夫教授,尤其是 Г. М. 菲赫秦戈里次教授所提出的許多意見和批評。對於一切被提到的各位我都致以衷心的謝意。

И. 那湯松

1949, 3, 12, 於列寧格勒

# 上冊目錄

# 第一章　無限集

## §1　集的運算

“集論”是實變數函數論的基礎。它的歷史並不悠久：有關集論的最初的重要文獻是康脫在十九世紀末葉才發表的，可是，現在集論已是數學中一門範圍很廣的學科了。在這本書裏，集論只有輔助的意義，所以我們只討論這門學科的一些基礎知識。讀者對於這方面的理論若需要深入研究，可參閱阿力山大洛夫及豪司道夫所著的書。[1]

集是一種不可以精確定義的數學基本概念，所以我們只能給予一種描寫。凡是具有某種特殊性質的東西的全體即稱之為集。例如自然數的全體為一集；直線上點的全體為一集；以實數為係數的多項式的全體為一集；諸如此類。

任何東西，對於某一集而言，或是屬於該集，或是不屬於該集。二者必居其一，但不可得兼。

若 $A$ 為某集，$x$ 為一個屬於 $A$ 的東西，則稱 $x$ 為 $A$ 的元素，記作：

$$x \in A.$$

若 $x$ 不屬於 $A$，則寫為

$$x \overline{\in} A.$$

---

[1] 阿力山大洛夫，集與函數論的汎論，(1948)，(俄文)。豪司道夫，集論，(1937)，(德文)。

例如，$R$ 爲有理數全體所成之集，則

$$\frac{3}{4}\in R,\ \sqrt{2}\in R.$$

一個集的自身決不能作它的元素：*)

$$A\in A.$$

不含任何元素的集，爲便利起見，稱之爲"空集"。我們用 0 表示它。例如方程式

$$x^2+1=0$$

的實根的全體就是空集。

除空集外，我們在研究中必然會遇到的還有"單元素集"。凡僅含一個元素之集稱爲單元素集。例如方程式

$$2x-6=0$$

的根的全體是一個單元素集，它是由單獨的一個元素，就是數 3，所組成的。

若集 $A$ 的一般元素是 $x$，則有時寫爲：

$$A=\{x\}.$$

有時集的元素可以全部寫出的，那末可將集的元素全部寫出後外加一個花括弧。例如

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

**定義 1** 兩集 $A$ 與 $B$，若 $A$ 所有的元素都是 $B$ 的元素，則稱 $A$ 爲 $B$ 的子集，寫爲：

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

$B$ 稱爲 $A$ 的包括集。

例如 $N$ 爲自然數全體的集，$R$ 爲有理數全體的集，則

$$N\subset R.$$

*) 這個陳述，此地實際是一個公理。——譯者註

顯然，集的自身是它的子集：

$$A \subset A.$$

空集是任何集 $A$ 的子集。因爲由定義 1，所謂 $A \subset B$ 乃表示凡元素不屬於 $B$ 的也不屬於 $A$。

**定義 2**　兩集 $A$ 與 $B$，若 $A \subset B$，$B \subset A$，稱 $A$ 與 $B$ 相等，寫爲：

$$A = B.$$

例如　$A = \{2, 3\}$，$B$ 爲方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所成之集，則 $A = B$.

**定義 3**　設 $A$ 與 $B$ 爲二集，又集 $S$ 包含 $A$ 與 $B$ 中所有元素但不含其他元素，稱 $S$ 爲 $A$ 與 $B$ 的和集，寫爲：

$$S = A + B.$$

同樣可以定義 $n$ 個集 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 的和集，可以定義一系列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 的和集；更一般的，如果 $\xi$ 表示具有某種性質的一般的記號，那末也可以定義所有 $A_\xi$ 的和集。上面所說的諸和集寫作：

$$S = A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n,\ 或\ S = \sum_{k=1}^{n} A_k;$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots,\ 或\ S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k;$$

$$S = \sum_{\xi} A_\xi.$$

例如 $S$ 爲所有正數的集，則

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1, k],$$

此處 $(a, b]$ 表示適合 $a < x \leqslant b$ 的一切 $x$ 所成的集。

若 $A\subset B$, 則顯然的

$$A+B=B,$$

特別是

$$A+A=A.$$

**定義 4** 設 $A$ 與 $B$ 爲二集，又集 $P$ 包含 $A$ 與 $B$ 的所有共同元素但不含任何其他元素，稱 $P$ 爲 $A$ 與 $B$ 的通集，寫爲:

$$P=AB.$$

例如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, 則

$$AB=\{3, 4\}.$$

同樣可以定義 $n$ 個集 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 的通集，也可定義一系列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 的通集；更一般的，若用 $\xi$ 表示滿足某種性質的記號，那末也可以定義所有 $A_\xi$ 的通集。上面所說諸集的寫法是:

$$P=A_1A_2\cdots\cdots A_n, \text{ 或 } P=\prod_{k=1}^{n} A_k,$$

$$P=A_1A_2A_3\cdots\cdots, \text{ 或 } P=\prod_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P=\prod_{\xi} A_\xi.$$

例如

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)=\{0\} \text{ (單元素集)}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{k}\right)=0 \text{ (空集)}$$

若 $A\subset B$, 則顯然的

$$AB=A,$$

特別是

$$AA=A.$$

若二集 $A$ 與 $B$ 沒有共同元素，則寫爲

$$AB=0;$$

此時也稱 $A$ 與 $B$ 是"不相交的"。

**定理 1**　設 $A$ 爲一集，$\{E_\xi\}$ 是以集 $E_\xi$ 做元素的集，則

$$A\sum_\xi E_\xi=\sum_\xi AE_\xi.$$

**證明**　假設

$$S=A\sum_\xi E_\xi,\ T=\sum_\xi AE_\xi. \quad (1)$$

設 $x\in S$，則 $x\in A$ 並且 $x\in\sum_\xi E_\xi$。後者表示有 $\xi_0$ 適合於 $x\in E_{\xi_0}$，總之 $x\in AE_{\xi_0}$，所以 $x\in T$。從而證明了

$$S\subset T.$$

反之，若設 $x\in T$，則必有 $\xi_0$ 適合於 $x\in AE_{\xi_0}$。換言之：$x\in A$ 又 $x\in E_{\xi_0}$。由 $x\in E_{\xi_0}$ 知 $x\in\sum_\xi E_\xi$。又因 $x\in A$，所以 $x\in S$. 於是

$$T\subset S.$$

由 $T\subset S$ 和 $S\subset T$，得着 $S=T$.

**系**　$A(B+C)=AB+AC.$

**定義 5**　設 $A$ 與 $B$ 爲二集，又集 $R$ 包含屬於 $A$ 而不屬於 $B$ 的一切元素且除此而外無其他元素，稱 $R$ 爲 $A$ 與 $B$ 的差集，寫作：

$$R=A-B.$$

例如　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，則

$$A-B=\{1,2\}.$$

**定理 2**　設 $A,B,C$ 爲三集，則

$$A(B-C)=AB-AC.$$

其證明可由讀者自行補足。

集的運算與普通算術的運算頗有相似之處，但是並不完全相同，如上面所說的關係式 $A+A=A$ 及 $AA=A$，在算術上是不成立的。下面我們還要舉一個不相似的例子。

**定理 3** 關係式

$$(A-B)+B=A \tag{2}$$

當 $B\subset A$ 且僅當 $B\subset A$ 時成立。

**證明** 設(2)為真，則每一被加集均為其和集的子集，所以 $B\subset A$。又設 $B\subset A$，則 $(A-B)+B\subset A$。但是另一方面，關係式 $(A-B)+B\supset A$ 的成立是無條件的，所以 $B\subset A$ 含有(2).

## §2 一對一的對應

設 $A$ 與 $B$ 為兩個有限集，自然的會發生下面的問題：它們所含的元素的個數是否相同。我們可以數一下每一集所含的元素的個數是多少，從所得的數字就可以解決這個問題。但是不數也可以解決問題。例如

$$A=\{a, b, c, d, e\},$$

$$B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}.$$

如果我們細察下面的表：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$: | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| $B$: | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\varepsilon$ |

我們雖然不數，也曉得 $A$ 與 $B$ 有相同的元素的個數。

上面所說的比較法有這樣一個特性：對於一集的每一個元素，另一個集中有一個元素並且只有一個元素和它對應。這個比較法也可以用之於無限集。例如，$N$ 為自然數全體的集，而 $M$ 為所有 $\frac{1}{n}$ 的全體。用

對應法，將$N$中的$n$對應於$M$中的$\frac{1}{n}$:

| $N$: | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$: | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | … |

，

立卽可以看到$N$與$M$所含元素是一對一對的配得起來的。

現在我們給配對無餘的概念以精確的定義:

**定義1**　設$A$與$B$爲二集，又設有一種對應法$\varphi$，具有下面的性質：對於$A$的任一元素$a$，$B$有惟一的元素$b$與之對應；並且$B$的任一元素$b$，$A$也有惟一的元素$a$與之對應。此時稱$A$與$B$成一對一的對應，簡稱一一對應。

**定義2**　若$A$與$B$能成一對一的對應，則稱$A$與$B$是"對等"的，或者稱它們的"勢"是相同的。此事記作

$$A\sim B.$$

不難明白，二個有限集只有當他們的元素的個數是相同時才是對等的。由上可見，"其勢相同"一語乃是有限集的元素"個數相同"的直接擴充。

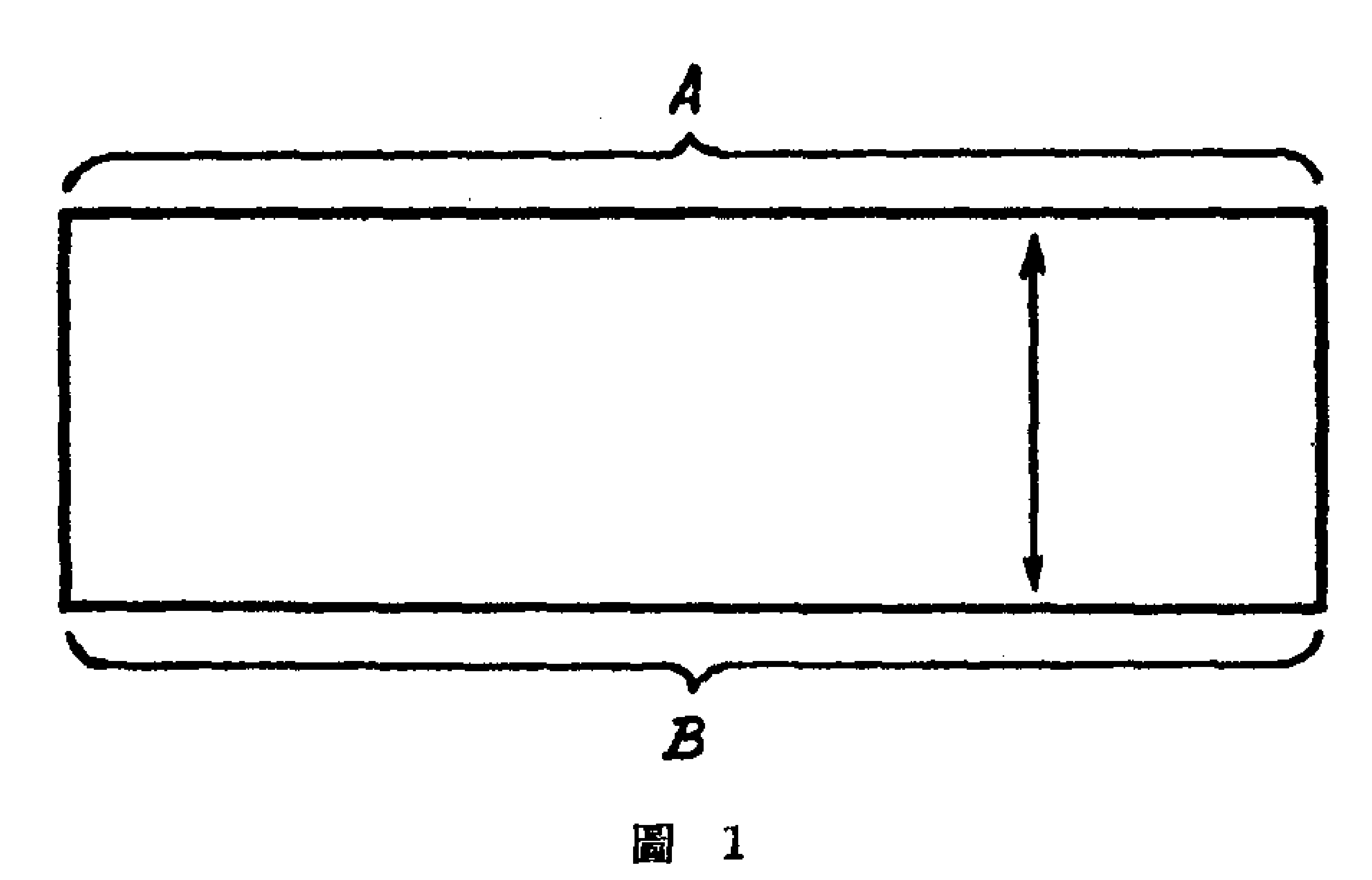



圖 1

下面舉幾個對等集的例子。

設$A$與$B$是一個長方形的一對平行邊上點的集（圖 1），則$A\sim B$。

設 $A$ 與 $B$ 是兩個同心圓周上點的集（圖 2），顯然 $A\sim B$。所可注意的，此時若將此二圓周展開爲直線，則此二線段的長並不相同。這個例子告訴我們，一個較長的線段並不含有“更多的”點，這種現象，由下例更爲顯然。假設 $A$ 表示直角三角形斜邊上點的集，$B$ 表示底邊上點的集，那末由圖 3，可以看到 $A\sim B$，雖然底邊的長小於斜邊。假使我們將底邊覆蓋在斜邊的上面，那末 $B$ 就成爲$A$的子集，並且是 $A$ 的眞子集（$B$是$A$的眞子集乃是：$B\subset A$，但 $B\neq A$）。由此例可以明白：的確有集可與其眞子集對等的。但是任何有限集却不能和它的眞子集對等。由此可見，只有無限集才有此種奇妙的性質。以後我們還要證明，凡無限集必含有與他自身對等的眞子集。此地我們再舉一個例子。

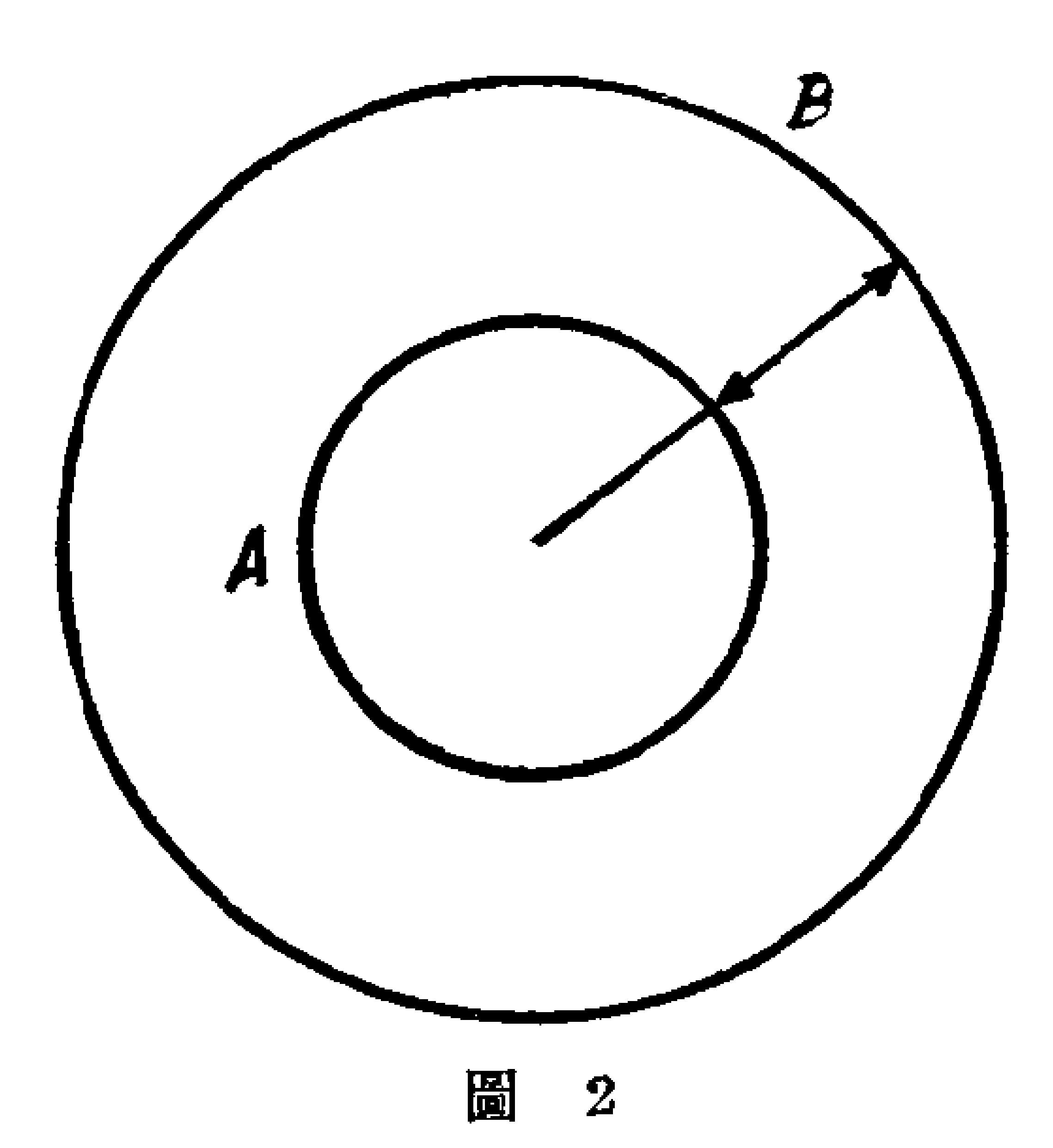


圖 2

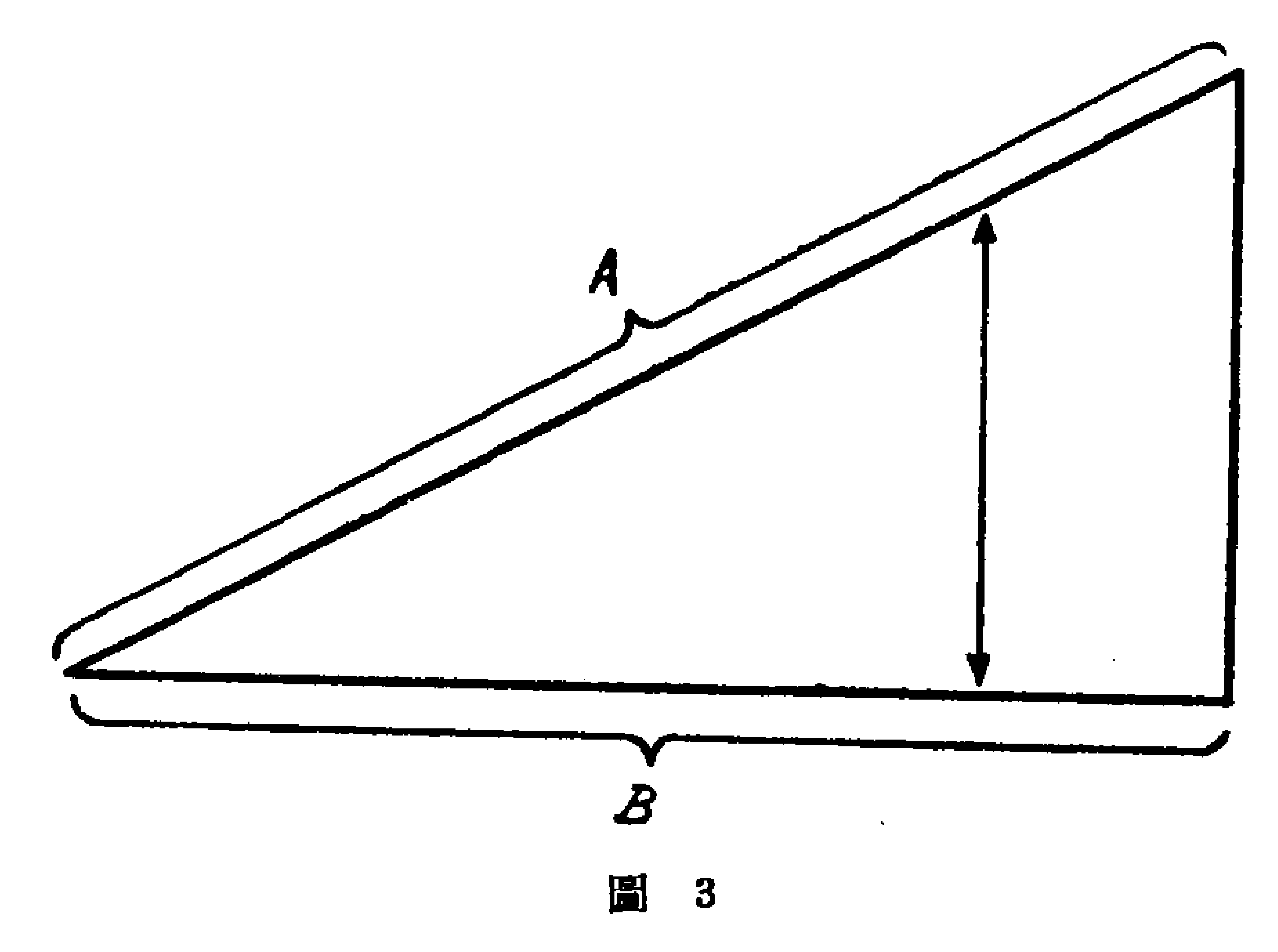


圖 3

設 $N$ 表示自然數全體的集，而$M$爲偶數的全體：

$$N=\{n\},\ M=\{2n\}.$$

將此二集用下法使成一一對應：

| $N$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$: | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | … |

則 $M$ 與 $N$ 是對等的，雖然 $M$ 是 $N$ 的眞子集。因此得到："自然數有多少，偶數也有多少"。

下面關於對等集的若干簡單性質，讀者可以自己證明之。

**定理 1**　$a$) $A\sim A$.

$b$) 若 $A\sim B$, 則 $B\sim A$.

$c$) 若 $A\sim B$, $B\sim C$, 則 $A\sim C$.

**定理 2**　設 $A_1, A_2, A_3,\cdots\cdots$ 及 $B_1, B_2, B_3,\cdots\cdots$ 爲二系列的集。若諸集 $A_n$ 各不相交，諸集 $B_n$ 亦各不相交，卽

$$A_nA_{n'}=0,\ B_nB_{n'}=0 \qquad (n\neq n'),$$

且

$$A_n\sim B_n \qquad (n=1, 2, 3,\cdots\cdots),$$

則

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

## § 3　可列集

**定義 1**　設 $N$ 爲自然數全體所成之集

$$N=\{1, 2, 3,\cdots\cdots\}.$$

凡與集 $N$ 對等的集 $A$ 稱爲可列集，或者稱 $A$ 是可列的。

此時也稱 $A$ "具有勢 $a$"。很明顯的，所有可列集是兩兩對等的。

下面是幾個可列集的例子：

$$A=\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\cdots\cdots,\ n^2,\cdots\cdots\},$$

$$B=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,\cdots\cdots,\ n^3,\cdots\cdots\},$$

$$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\cdots\cdots,\ 2n,\cdots\cdots\},$$

$$D=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\cdots\cdots, \frac{1}{n},\cdots\cdots\right\}.$$

**定理 1**　集 $A$ 爲可列的必要且充分條件是可以把他列成形式

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,\ a_n,\cdots\cdots\}.\tag{1}$$

**證明**　若 $A$ 具有 (1) 的形式，那末將 $A$ 的元素 $a_n$, 使它對應於它的足數 $n$, 因而得 $A$ 與 $N$ 間的一一對應。所以 $A$ 是可列的。

反之，若設 $A$ 是可列的，那末在 $A$ 與 $N$ 之間存在一種一一對應法 $\varphi$。由 $\varphi$ 得 $n$ 的對應元素 $a_n$, 於是 $A$ 就可寫成 (1) 的形式了。

**定理 2**　任何無限集必含有可列子集。

**證明**　設 $A$ 爲一無限集。從 $A$ 取一元素 $a_1$。因爲 $A$ 是無限集，所以從 $A-\{a_1\}$ 又可取一元素 $a_2$。$A-\{a_1, a_2\}$ 決非空集，所以又可以由此取一元素 $a_3$。因爲 $A$ 是無限集，所以此種手續可以繼續做去不會終止。因此得着 $A$ 的可列子集:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,\ a_n,\cdots\cdots.$$

**定理 3**　可列集的任何無限子集是可列的。

**證明**　設 $A$ 爲可列集，$B$ 是它的無限子集。如果將 $A$ 列成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots,$$

那末依照次序逐一的看下去，不時會遇到 $B$ 中的元素。於是對於 $B$ 中每一個元素，有一個自然數與之"相遇"。若將 $B$ 中元素重新編號，順次的用自然數來對應，就知道 $B$ 是可列的。

**系**　從可列集 $A$, 除去一個有限子集 $M$, 所得的 $A-M$ 仍爲可列集。

**定理 4**　一個有限集和一個可列集如無公共元素，那末他們的和集是一個可列集。

**證明**　設

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,\ a_n\},$$

$$B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots\},$$

在假設 $AB=0$ 下，證明 $A+B=S$ 是一個可列集就好了。此時 $S$ 可表示為

$$S=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n, b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots\};$$

將 $S$ 重新編號即可見 $S$ 為一可列集。

在假定中，無公共元素一語將它略去，定理還是眞的。下面幾個定理中，這個條件也是可以略去的。

**定理 5**　兩兩不相交的有限個可列集的和集是一個可列集。

**證明**　設 $A,\ B,\ C$ 是三個可列集:

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\},$$

$$B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots\},$$

$$C=\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots\cdots\}.$$

那末它們的和集　$S=A+B+C$　可以寫成

$$S=\{a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\cdots\cdots\},$$

所以 $S$ 是可列的。[譯者註: 假如 $AB+BC+CA\neq 0$, 那末有些 $a_\nu$ 或許就是 $b_\mu$, $\cdots\cdots$, $S$ 仍是可列的。集的個數不止 3 的時候，證明仿此。]

**定理 6**　兩兩不相交的可列個有限集的和集是一個可列集。

**證明**　設 $A_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 是兩兩不相交的可列個有限集:

$$A_1=\{a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ \cdots\cdots,\ a_{n_1}^{(1)}\},$$

$$A_2=\{a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ \cdots\cdots,\ a_{n_2}^{(2)}\},$$

$$A_3=\{a_1^{(3)},\ a_2^{(3)},\ \cdots\cdots,\ a_{n_3}^{(3)}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 $S=\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。要證 $S$ 是一可列集，可將 $S$ 中的元素給以如下之排列: 先寫出 $A_1$ 中所有元素，然後寫 $A_2$ 中所有元素，如此進行，得着 $S$ 的表示，由此表示知 $S$ 為一可列集。

**定理 7** 兩兩不相交的可列個可列集的和集是一可列集。

**證明** 設 $A_k\ (k=1,2,3,\cdots\cdots)$ 是兩兩不相交的可列個可列集:

$$A_1=\{a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_3^{(1)},\cdots\cdots\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(2)},\cdots\cdots\},$$
$$A_3=\{a_1^{(3)},\ a_2^{(3)},\ a_3^{(3)},\cdots\cdots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 $S=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$。我們將 $S$ 中的元素給以如下之排列：先寫 $a_1^{(1)}$。然後寫 $a_2^{(1)}$ 及 $a_1^{(2)}$，此時 $a$ 之上下附數之和都是 3。然後寫 $a_3^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$，此時 $a$ 之上下附數之和都是 4。如是進行，乃得

$$S=\{a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_1^{(2)},\ a_3^{(1)},\ a_2^{(2)},\ a_1^{(3)},\ a_4^{(1)},\cdots\cdots\},$$

由此可知 $S$ 為一可列集。

以記號 $a$ 表示可列集的勢，我們可將上述諸定理述之如下：設 $n_\nu$ 和 $n$ 都是自然數，那末，

$$a-n=a,\quad a+n=a,\quad a+a+\cdots\cdots+a=na=a,$$
$$n_1+n_2+n_3+\cdots=a,\quad a+a+a+\cdots\cdots=aa=a.$$

**定理 8** 有理數的全體所成之集 $R$ 是一可列集。

**證明** 設所有正有理數的全體是 $R_+$，負有理數的全體是 $R_-$，則

$$R=R_++\{0\}+R_-.$$

$R_+$ 和 $R_-$ 顯然是對等的。因此我們只要證明 $R_+$ 是可列集就好了。當 $q$ 是一個一定的自然數而 $p$ 為任何自然數，則有理數 $\frac{p}{q}$ 的全體，即

$$\frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \frac{3}{q},\cdots\cdots$$

是一個可列集。當 $q$ 在自然數範圍內活動時，$\frac{p}{q}$ 的全體除去其重複者即得 $R_+$。應用定理 3 及定理 7 不難看到 $R_+$ 是一可列集。

**系** 任何區間 $[a, b]$ 中的有理數的全體是一可列集。

**定理 9** 添加一個有限集或可列集 $A$ 的所有元素於一個無限集 $M$,得到一個新集 $M+A$, 則 $M$ 與 $M+A$ 之勢相同,即

$$M+A\sim M.$$

**證明** 由定理 2, $M$含有可列子集 $D$. 設 $M-D=P$, 則

$$M=P+D,\ M+A=P+(D+A).$$

由 $P\sim P$, $D+A\sim D$ (定理 4 及定理 5), 所以 $M+A\sim M$.

**定理 10** 若 $S$ 是一個不可列的無限集, $A$ 是 $S$ 的一個有限子集或可列子集,則

$$S-A\sim S.$$

**證明** 差集 $M=S-A$ 不是有限的;否則 $S$ 變成有限集或可列集了。今 $M$ 既爲無限集,所以應用定理 9, 乃得 $M+A\sim M$, 卽 $S\sim S-A$。

**系** 凡無限集必定含有一個和它自身對等的眞子集。

根據定理 3 及 10, 從無限集中除去一個任意的有限子集, 並不改變它的勢,故必含有和它自身對等的眞子集。

於此我們看到: 無限集具有一種性質, 是有限集所沒有的。所以我們可以給無限集一個正面的定義:

**定義 2** 凡集包含一個與它自身對等的眞子集的稱爲無限集。

下面我們要證明一個非常一般的定理。

**定理 11** 若 $A$ 中每元素由 $n$ 個互相獨立的記號所決定,而每一記號各自跑遍一個可列集:

$$A=\{a_{x_1, x_2, \cdots, x_n}\} \qquad (x_k=x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots\cdots;\ k=1, 2, \cdots, n),$$

那末 $A$ 是可列的。

**證明** 本定理可用數學歸納法證之。

若 $n=1$, 則本定理顯然是眞的。今假設, 本定理當 $n=m$ 時是眞

的，由此證明當 $n=m+1$ 時亦眞。

設 $$A=\{a_{x_1},x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}\}.$$

$A$ 中的元素其中 $x_{m+1}=x_{m+1}^{(i)}$ 的，記其全體爲 $A_i$，則由假定，

$$A_i=\{a_{x_1},x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}^{(i)}\}$$

爲一可列集。因

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,$$

所以 $A$ 是可列集。

由此定理可得下列諸定理:

1) 平面上的點 $(x,y)$，其座標爲有理數的，其全體成一可列集。

2) 元素 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$，由 $k$ 個自然數所組成的，其全體成一可列集。

3) 整數係數的多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的全體是一可列集。

定理 3) 的證明: 先固定 $n$，由定理 11，整數係數的 $n$ 次多項式的全體是一可列集。再用定理 7 即得定理 3)。

每個多項式只有有限個的根，所以得到下面的定理。

**定理 12** 代數數的全體成一可列集。

(所謂代數數，乃是整數係數的多項式的根)。

## § 4 連續集的勢

無限集不一定是可列的，現在舉一個重要例子說明如下:

**定理 1** 區間 $U=[0,1]$ 是不可列的。

(所謂區間 $[a,b]$ 乃滿足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 $x$ 的全體)。

**證明** 如果 $U$ 是可列的，那末 $U$ 中一切點可寫爲：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots. \qquad (*)$$

於是 $U$ 中任一點必在 (*) 之中。將 $U$ 由點$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{3}$分成三部分；

$$\left[0,\frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3},\ 1\right], \qquad (1)$$

其中至少有一個不含有點 $x_1$ (圖 4)。今以 $U_1$ 表示不含點 $x_1$ 的 (1) 中的一個區間（三個區間中可能有兩個都不含有 $x_1$，此時取 $U_1$ 爲其中任何一個好了，例如取較左的一個）。

現在再將 $U_1$ 等分成三部分，取其中不含 $x_2$ 的一個區間 $U_2$。然後再將 $U_2$ 分成三個相等的部分，取其中不含 $x_3$ 的一個區間 $U_3$，依此類推。

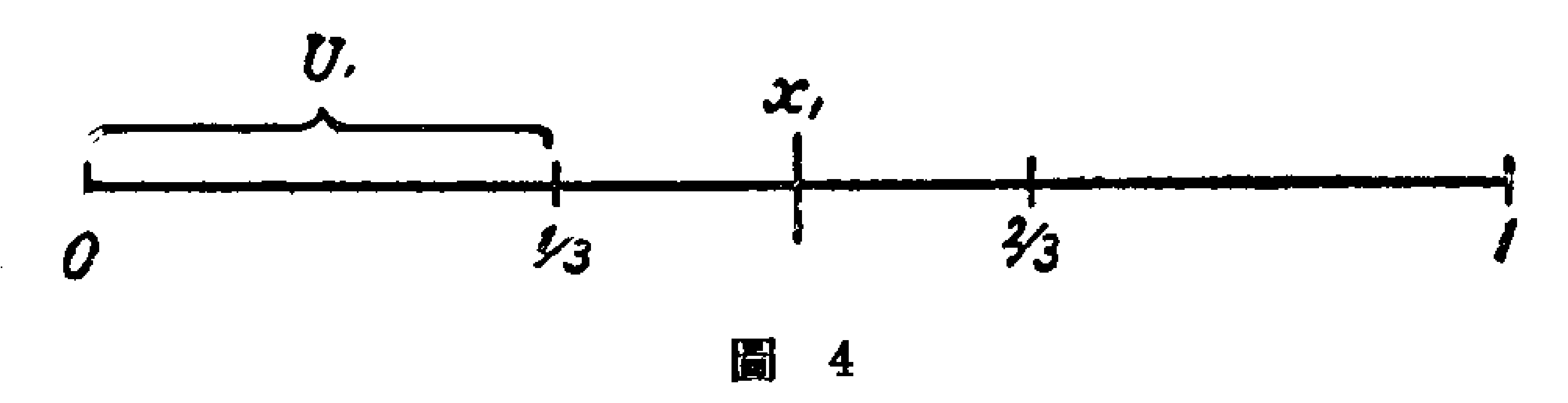



圖 4

如此進行不已，我們得到一系列的區間 $\{U_i\}$。由其取法，知道

$$U\supset U_1\supset U_2\supset U_3\supset\cdots\cdots,$$

且 $$x_n\overline{\in} U_n.$$

區間 $U_n$ 的長是$\frac{1}{3^n}$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$，根據極限論中一個著名的定理，必有點 $\xi$ 適合

$$\xi\in U_n \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

由於 $\xi$ 是 $U$ 的一個點，必然要在 (*) 中出現。但是不論 $n$ 取什麼值，總有 $$x_n\overline{\in} U_n,\quad \xi\in U_n,$$

從而得到

$$\xi\neq x_n,$$

換言之，即 $\xi$ 不能與(*)中任一點相同。是乃矛盾，因此定理得證。

由於這個定理的事實，我們得着新的勢。

**定義** 凡與 $[0,1]$ 對等的集 $A$，即

$$A \sim U,$$

稱 $A$ 具有"連續集的勢"，簡稱 $A$ 的勢是 $c$。

**定理 2** 閉區間 $[a,b]$，開區間 $(a,b)$ 以及半閉區間 $(a,b]$ 及 $[a,b)$ 的勢都是 $c$。

**證明** 設

$$A=[a,b],\ U=[0,1].$$

由

$$y=a+(b-a)x$$

就組成 $A=\{y\}$ 與 $U=\{x\}$ 間的一對一的對應，所以 $A$ 具有連續集的勢。又從一個無限集除去一點或者兩點，所得的集與原來的集是對等的，所以 $(a,b)$，$(a,b]$，$[a,b)$ 的勢與 $[a,b]$ 的勢相同，都是 $c$。

**定理 3** 把兩兩不相交的有限個勢為 $c$ 的集作成和集，其勢是 $c$。

**證明** 設

$$S=\sum_{k=1}^{n} E_k \qquad (E_k E_{k'}=0,\ k \neq k'),$$

$E_k$ 的勢都是 $c$。將半閉區間 $[0,1)$ 用分點

$$c_0=0<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<c_n=1$$

分成 $n$ 個半閉區間

$$[c_{k-1}, c_k) \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

每一個半閉區間的勢是 $c$，所以我們可以使 $E_k$ 與 $[c_{k-1}, c_k)$ 做成一對一的對應。因

$$[0,1)=\sum_{k=1}^{n}[c_{k-1}, c_k),$$

所以 $S$ 和 $[0, 1)$ 成一對一的對應。於是定理得證。

**定理 4**　把兩兩不相交的可列無限個勢為 $c$ 的集做成和集，其勢是 $c$。

**證明**　設

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad (E_k E_{k'}=0, k \neq k'),$$

其中每一個 $E_k$ 的勢都是 $c$。

於半閉區間 $[0,1)$ 中取一列單調增加的數列 $\{c_n\}$：

$$c_0=0<c_1<c_2<\cdots\cdots,$$

且

$$\lim_{k\to\infty} c_k=1.$$

將 $E_k$ 與 $[c_k, c_{k+1})$ 做成一對一的對應，即得 $S$ 與 $[0, 1)$ 也是一一對應的。

**系 1**　實數全體所成之集 $Z$，其勢是 $c$。

因為

$$Z=\sum_{k=1}^{\infty}\{[k-1, k)+[-k, -k+1)\}.$$

**系 2**　無理數的全體是一個勢為 $c$ 的集。

**系 3**　超越數(非代數數)是存在的。

**定理 5**　正整數列的全體成一集 $Q$，$Q$ 的勢是 $c$。

**證明**　設　$Q=\{(n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots)\}$. 令 $Q$ 中的元素

$$(n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots)$$

和 $(0, 1)$ 中的無理數

$$x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ddots}}}$$

對應。如是，$Q$ 與 $(0,1)$ 中無理數的全體成一對一的對應。故定理得證。

上面的證法是假定讀者已熟悉了連分數的理論而作的。本定理還可用他法證之。下面的證明是用到二進位數的理論。這種理論我們將來還要用到，所以此地先把它說明一下：——

1) 級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} \qquad a_k=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

的和稱為二進位小數，簡寫此和為

$$0,a_1a_2a_3\cdots\cdots. \tag{1}$$

2) 對於 $x\in[0,1]$，必可用二進位小數

$$x=0,a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

表示之。

若 $x$ 不是分數 $\frac{m}{2^n}(m=1,3,\cdots,2^n-1)$ 時，則 (1) 的表示是惟一的。數 0 與 1（惟一的）可由下式表示它：

$$0=0,000\cdots,\quad 1=0,111\cdots.$$

若 $x=\frac{m}{2^n}(m=1,3,\cdots,2^n-1)$，則 $x$ 可有二種表示法。如 $x$ 可表示為 $0,a_1\,a_2\cdots a_{n-1}\,1000\cdots$，則也可表示為 $0,a_1\,a_2\cdots a_{n-1}\,0111\cdots$. 例如

$$\frac{3}{8}=\begin{cases}0,011000\cdots\\0,010111\cdots\end{cases}$$

3) 每一個二進位小數一定等於 $[0,1]$ 中的某一個數。

如一個二進位小數 $x$ 從某一位起全是 0 或全是 1，則一定屬於形式 $\frac{m}{2^n}(m=1,3,\cdots,2^n-1)$（$0,000\cdots$ 及 $0,111\cdots$ 除外）即存在二種表示法；否則 $x\neq\frac{m}{2^n}$，其表示法是惟一的。

現在我們再來證明定理 5。我們規定：對於 $[0,1)$ 中的數用二進位小數表示時，不允許取從某一位起全是 1 的形式。如是，對於 $[0,1)$ 中

每一數用二進位小數表示時，其法是惟一的。並且對於 $[0,1)$ 中每一個數的表示

$$0,a_1a_2a_3\cdots \tag{1}$$

中，不論 $N$ 是多麼大的一個數，必定可以找到 $a_k$，使

$$a_k=0,\ k>N.$$

反過來，對於小數 (1) 具有上述的性質時，必有 $[0,1)$ 中的一個數與之對應。假如我們已經先知道使 $a_k=0$ 的那些 $k$，那末小數(1)即可完全決定。這種 $k$ 組成一個單調增加的自然數列

$$k_1<k_2<k_3<\cdots\cdots \tag{2}$$

因此對於每一個自然數列 (2) 可以作一個小數 (1) 與之對應。顯然的，所有 (2) 的自然數列的全體組成一集，記作 $H$，其勢是 $c$。對於 $H$ 與 $Q$ 我們可以作如下的對應：對於適合 (2) 的 $\{k_n\}$，作

$$(n_1,n_2,n_3,\cdots),$$

於此

$$n_1=k_1,\ n_2=k_2-k_1,\ n_3=k_3-k_2,\ \cdots\cdots,$$

與之對應。如是 $H$ 與 $Q$ 成一對一的對應了。上面已經證明 $H$ 的勢是 $c$，所以 $Q$ 的勢是 $c$。

**定理 6**　若集 $A$ 中每元素由 $n$ 個互相獨立的記號所決定，而每一個記號各自跑遍了一個勢是 $c$ 的集——即

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\},$$

而 $x_i$ 遍取勢是 $c$ 的集——，則 $A$ 的勢是 $c$。

**證明**　當證明時，不妨設 $n=3$．設

$$A=\{a_{x,y,z}\},\qquad x\in X,y\in Y,z\in Z,$$

此地 $X,Y,Z$ 的勢都是 $c$。又設 $Q$ 是自然數數列的全體。由定理 5，$Q$ 的勢是 $c$。將 $X,Y,Z$ 各各與 $Q$ 做成一對一的對應。設 $x_0\in X$，$y_0\in Y$，

$z_0 \in Z$，其在 $Q$ 中的對應元素，分別寫明如下：

$$x_0 \text{ 與 } (n_1,\ n_2,\ n_3, \cdots\cdots) \text{ 對應，}$$

$$y_0 \text{ 與 } (p_1,\ p_2,\ p_3, \cdots\cdots) \text{ 對應，}$$

$$z_0 \text{ 與 } (q_1,\ q_2,\ g_3, \cdots\cdots) \text{ 對應。}$$

今使 $A$ 的元素 $\xi = a_{x_0,\ y_0,\ z_0}$ 與 $Q$ 的元素

$$(n_1,\ p_1,\ q_1,\ n_2,\ p_2,\ q_2,\ n_3,\ \cdots\cdots)$$

對應，即得 $A$ 與 $Q$ 之間的一對一的對應。

由此定理卽得下列諸重要的系：

**系 1** 平面上點的全體成一勢是 $c$ 的集。

**系 2** 三度空間中點的全體，是一個勢是 $c$ 的集。

或者說，空間中點的集，它的勢與空間的度數無關。

**系 3** 設有 $c$ 個（$c$ 表示連續集的勢）集的和集，若每個集的勢都是 $c$，則其和集的勢也是 $c$。

事實上，對於每一個被加的集使與平面 $xy$ 上平行於 $ox$ 軸的直線上點的集做成一一對應的時候，也就得到所述的和集與平面 $xy$ 上點的集做成了一對一的對應。

定理 3, 4 以及最後的系，可用記號簡寫如下：

$$c+c+\cdots+c=cn=c,\quad c+c+c+\cdots=ca=c,\quad cc=c.$$

**定理 7** 若集 $A$ 中每元素，由互相獨立的可列個記號所決定，卽

$$A=\{a_{x_1,\ x_2,\ x_3,}\cdots\},$$

而每一個 $x_i$ 取自一個勢是 $c$ 的集，則 $A$ 的勢也是 $c$。

**證明** 設 $x_k$ 取自 $X_k$。$Q$ 是相然數數列全體所成的集。每一個 $X_k$ 與 $Q$ 成一對一的對應（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$），今記其對應爲 $\varphi_k$。

設 $\xi \in A$，則

$$\xi = a_{x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},}\cdots\cdots,$$

其中 $$x_k^{(0)}\in X_k \qquad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

由 $\varphi_k$ 得 $x_k^{(0)}$ 的對應元素是 $Q$ 中的數列:

$$(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \cdots\cdots)\in Q.$$

於是對於 $\xi\in A$, 有一個以正整數爲元素的無限行列

$$\left|\begin{array}{llll} n_1^{(1)}, & n_2^{(1)}, & n_3^{(1)}, & \cdots\cdots \\ n_1^{(2)}, & n_2^{(2)}, & n_3^{(2)}, & \cdots\cdots \\ n_1^{(3)}, & n_2^{(3)}, & n_3^{(3)}, & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right. \qquad (*)$$

與之對應。設這種行列的全體爲 $L$,則 $L$ 與 $A$ 之間組成一對一的對應。所以只要測定 $L$ 的勢是 $c$ 好了。令 (*) 與

$$(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_1^{(2)}, n_3^{(1)}, n_2^{(2)}, n_1^{(3)}, n_4^{(1)}, \cdots\cdots)$$

對應 (此數列的取法與 § 3 定理 7 證明中取法相同), 立卽得到 $L$ 與 $Q$ 間的一對一的對應。

**定理 8** 設 $a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是 0 或 1,其取法是互相獨立的,則以所有數列

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$$

爲元素之集 $T$, 其勢是 $c$。

**證明** $T$ 中有一部分元素 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 從某一位起全是 1, 設這種元素的全體做成 $T$ 的子集 $S$。$S$ 中每一元素 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 對應於一個二進位小數 $0, a_1\,a_2\,a_3\cdots\cdots$, 這個小數所表示的數或是 1 或是 $\frac{m}{2^n}$ $(m=1, 3, \cdots, 2^n-1)$。所以 $S$ 是一可列集。

又令 $T-S$ 中的元素 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 對應於二進位小數 $0, a_1 a_2 a_3\cdots$, 乃得 $T-S$ 與 $[0, 1)$ 間的一對一的對應。所以, $T-S$ 的勢是 $c$。因之

$T$ 的勢是 $c$。

系 設集 $A$ 中每元素由互相獨立的可列個符號所決定，且每一符號僅有二種取法，那末 $A$ 的勢是 $c$。

事實上，假使 $A=\{a_{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots}\}$ 而

$$x_k=\begin{cases}l_k\\ m_k\end{cases},$$

將 $A$ 與定理 8 中之 $T$ 組成如下的對應：當 $x_k=l_k$ 時 $a_k=0$，當 $x_k=m_k$ 時 $a_k=1$。在此條件下，令 $A$ 的 $a_{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots}$ 對應於 $T$ 的 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$，那末 $A$ 與 $T$ 成一一對應了。

## § 5 勢的比較

我們在前面雖然講到關於勢的事情，例如："二集有相同的勢"，"某集的勢是 $a$"，"某集的勢是 $c$"。但是究竟什麼是勢？這是還沒有定義的。

康脫曾經對於勢的概念，有過一個相當模糊的定義。他說："所謂一個集 $A$ 的勢，乃表示 $A$ 的一種一般性質，而該性質當離去 $A$ 的元素而言，以及離去 $A$ 的元素的次序而言，仍舊是保持的"。他用

$$\overline{\overline{A}}$$

表示 $A$ 的勢。

我們對於康脫的定義不能認爲滿意，但是仍沿用他的記號 $\overline{\overline{A}}$。我們給勢下這樣的定義：

**定義 1** 將所有的集分類，凡二集對等時且只有對等時稱爲屬於同一類。對於每一類與以一個記號。稱此記號爲該類中任一集的勢。若 $A$ 的勢是 $\alpha$，則記以

$$\overline{\overline{A}}=\alpha.$$

由是凡對等的集，其勢相同。包含自然數全體所成之集 $N$ 的一類

以記號 $a$ 記其任一集的勢。所以可列集的勢都是 $a$。包含集 $U=[0, 1]$ 的一類與以記號 $c$。那末，凡是與 $U$ 對等的集，其勢都是 $c$。包含一個集 $A=\{a, b, c,\}$ 的類，令記號"3"與之對應。那末，凡集僅含三個元素的，其勢都是 3。所以無限集的勢是有限集元素的個數的擴充，空集的勢是 0。單元素集的勢是 1。

**定義 2**　設二集 $A$ 和 $B$ 的勢是 $\alpha$ 和 $\beta$:

$$\overline{\overline{A}}=\alpha, \quad \overline{\overline{B}}=\beta.$$

如果 1) $A$ 不與 $B$ 對等，而 2) $B$ 中含有一個子集與 $A$ 對等，那末說：$A$ 的勢小於 $B$ 的勢，或是說：$B$ 的勢大於 $A$ 的勢，記作

$$\alpha<\beta, \text{ 或 } \beta>\alpha.$$

例如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{32}\}, \qquad \overline{\overline{A}}=32,$$
$$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{49}\}, \qquad \overline{\overline{B}}=49.$$

$A$ 不與 $B$ 對等。但是 $B$ 有子集 $B^*=\{b_1, b_2, \cdots, b_{32}\}$ 使 $A\sim B^*$。所以

$$32<49.$$

用與此同樣的方法，可知任何一個自然數 $n$ 小於 $N$ 的勢 $a$, 也小於 $[0, 1]$ 的勢是 $c$。

最後，設

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\}, \qquad \overline{\overline{N}}=a$$
$$U=[0, 1], \qquad \overline{\overline{U}}=c,$$

則 $N$ 不 $\sim U$（見 § 4 定理 1），但 $U$ 有子集 $U^*=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ 適合 $U^*\sim N$。所以

$$a<c.$$

至於在 $a$ 與 $c$ 之間是否有勢 $\mu$ 滿足

$$a<\mu<c,$$

這是尙未解決的一個難題。[1)]

可是我們容易找到集，其勢大於 $c$。

**定理 1** 設 $F$ 是在 $[0,1]$ 上定義的一切實函數，則 $F$ 的勢大於 $c$。

**證明** 設 $U=[0,1]$。首先來證明 $F$ 不與 $U$ 對等。如果 $F\sim U$，那末存在一種對應法，可使 $F$ 與 $U$ 成一對一的對應。假設 $[0,1]$ 中的 $t$，對應於 $F$ 中之元素是 $f_t(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$。記

$$F(t,x)=f_t(x),$$

那末，$F(t,x)$ 是在 $0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 中所定義的兩個變數的函數。

函數

$$\psi(x)=F(x,x)+1$$

是在 $F$ 中的，所以 $U$ 中必有 $a$ 使適合 $\psi(x)=f_a(x)$，或是

$$F(x,x)+1=F(a,x).$$

但是取 $x=a$，上式却不可能成立。所以 $F$ 不與 $U$ 對等。

又 $F$ 的子集

$$F^*=\{\sin x+c\} \qquad (0\leqslant c\leqslant 1)$$

是與 $U$ 對等的，因使 $U$ 中的數 $c$ 與 $F^*$ 中的函數 $\sin x+c$ 做成對應，這個對應是一對一的。

於是定理完全證畢。

**定義 3** 區間 $[0,1]$ 上所定義的一切實函數所成之集，記其勢爲 $f$。

由定理 1，知

$$c<f.$$

然則是否有大於 $f$ 的勢？答曰然。實際上，對於任何一個勢，我們可以造一個集使其勢大於所設的勢。

---

*) 康脫預料沒有這種 $\mu$，這是康脫的假設。人們往往稱此假設爲"連續集的假設"。

**定理2**　設 $M$ 是一集，$T$ 是 $M$ 的一切子集所成之集，那末

$$\overline{\overline{T}}>\overline{\overline{M}}.$$

**證明**　因爲 $T$ 含有 $M$ 的一切子集，所以 $T$ 中有 $M$ 本身，有空集，又有 $M$ 中每一元素所成的單元素集。後者成一集 $T^*$, $T^*\sim M$, $T^*\subset T$。

下面只要證明 $T$ 不對等於 $M$ 就好了。

如果 $T\sim M$: 設 $\varphi$ 使 $T$ 與 $M$ 組成一對一的對應，於是對於 $M$ 中的 $m$, $T$ 中有惟一的 $\varphi(m)$ 與之對應，而 $T$ 中每一個元素一定可以寫爲 $\varphi(m)$, 此中 $m\in M$。

$M$ 中元素 $m$, 滿足 $m\in\varphi(m)$ 的姑且稱爲"好"的元素。否則稱爲"壞"的元素。與 $M$ 本身對應的元素確是"好"的，與空集對應的元素確是"壞"的。於是 $M$ 中的元素不是"好"的就是"壞"的。設 $M$ 中所謂"壞"的元素的全體爲 $S$, 則 $S\in T$。而 $M$ 中必有元素 $m_0$ 適合

$$S=\varphi(m_0).$$

然則這個元素 $m_0$ 是"好"的呢還是"壞"的呢？如果說 $m_0$ 是"好"的，那末

$$m_0\in\varphi(m_0)=S,$$

可是 $S$ 中僅含"壞"的元素，乃得矛盾。如果說 $m_0$ 是"壞"的，那末

$$m_0\overline{\in}\varphi(m_0)=S,$$

可是最後的式子即表示 $m_0$ 是"好"的，亦爲不可能。因此從而得到 $m_0$ 既非"好"的又非"壞"的，於是陷於矛盾。所以 $T$ 與 $M$ 不能對等。

定理證畢。

**注意**　若 $M$ 是一個由 $n$ 個元素所組成的有限集，則 $T$ 的元素的個數是 $2^n$。因爲 $T$ 含有一個空集，$C_n^1$ 個單元素集，$C_n^2$ 個二個元素的集，…。所以 $T$ 的元素的個數是

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

這個事實當 $n=0$ 及 $n=1$ 時亦真。前者表示 $M$ 是空集，而 $T$ 僅含一個元素即 $M$ 自身。後者表示 $M$ 爲單元素集，則 $T$ 含有二個元素，一爲空集，一爲 $M$。

下面的定義與上述結果聯系起來就是很自然的了。

**定義 4** 若 $M$ 的勢是 $\mu$，而以它的一切子集所組成的集爲 $T$，$T$ 的勢是 $\tau$，則定義

$$\tau=2^{\mu}.$$

定理 2 表示

$$2^{\mu}>\mu.$$

**定理 3**

$$c=2^{a}.$$

**證明** 設 $N$ 是自然數的全體，$T$ 是 $N$ 的一切子集的集，$L$ 是一切數列

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots)\qquad a_k=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

的集。由 § 4 的定理 8，

$$\overline{\overline{T}}=2^{a},\quad \overline{\overline{L}}=c.$$

對於 $T$ 中任一元素 $N^*$，$N^*$ 爲某些自然數所成之集，作 $L$ 的元素 $(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$ 與之對應，對應之規則如下：$k\in N^*$ 時定 $a_k=1$，$k\overline{\in} N^*$ 時定 $a_k=0$。從而得到 $T$ 與 $L$ 間的一對一的對應。於是定理證畢。

由定理 2 及定理 3 我們又得到

$$c>a.$$

下面二個定理具有重大的意義。

**定理 4** 設 $A\supset A_1\supset A_2$。若 $A_2\sim A$，則 $A_1\sim A$。

**證明** 設由對應法 $\varphi$ 使 $A$ 與 $A_2$ 成一對一的對應。於是對於 $A$ 中每一元素，在 $A_2$ 中有惟一的元素與之對應。所以在該對應法 $\varphi$ 下，

$A_2$ 中有子集 $A_3$ 對等於 $A_1$。又因 $A_2 \subset A_1 \sim A_3$，所以 $A_3$ 有子集 $A_4$ 對等於 $A_2$。

此種手續繼續進行，乃得 $A$ 的一串子集

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \cdots\cdots,$$

具有性質：

$$\begin{gathered} A \sim A_2 \\ A_1 \sim A_3 \\ A_2 \sim A_4 \\ A_3 \sim A_5 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

由此而得

$$\left.\begin{array}{l} A - A_1 \sim A_2 - A_3 \\ A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4 \\ A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (*)$$

設

$$D = AA_1A_2A_3\cdots\cdots,$$

則

$$A = (\underline{A - A_1}) + (A_1 - A_2) + (\underline{\underline{A_2 - A_3}}) + (A_3 - A_4) + (\underline{\underline{\underline{A_4 - A_5}}}) + \cdots + D,$$

$$A_1 = (A_1 - A_2) + (\underline{A_2 - A_3}) + (A_3 - A_4) + (\underline{\underline{A_4 - A_5}}) + \cdots + D,$$

在上面的二個式子，每一式中的被加集之間兩兩無共同元素。由性質 (*)，可見底下劃一線的兩集為對等，底下劃二線的兩集為對等，以此推

得 $A$ 與 $A_1$ 爲對等。

**定理 5** 設 $A, B$ 爲二集，如果 $A, B$ 中任何一個與其他一集的某子集對等，則 $A$ 與 $B$ 對等。

**證明** 設

$$A \sim B^*, \quad B^* \subset B,$$

$$B \sim A^*, \quad A^* \subset A.$$

因 $B^* \subset B \sim A^*$，所以 $A^*$ 有子集 $A^{**}$ 對等於 $B^*$。由是 $A \supset A^* \supset A^{**}$ 且 $A \sim A^{**}$（因 $A \sim B^*, B^* \sim A^{**}$）。由定理 4，所以 $A \sim A^*$。然 $A^* \sim B$，故 $A \sim B$。

由定理 4 及定理 5 得着下列若干重要的系。

**系 1** 設 $\alpha, \beta$ 是兩個勢，則下面三個關係式

$$\alpha = \beta, \ \alpha < \beta, \ \alpha > \beta$$

的任何兩個不能同時成立。

事實上，當關係式 $\alpha = \beta$ 成立時，其他二個當然都不會成立。

現設 $\alpha < \beta$ 與 $\alpha > \beta$ 同時成立。設 $A$ 之勢爲 $\alpha$，$B$ 之勢爲 $\beta$。

由 $\alpha < \beta$，則

1) $A$ 與 $B$ 不對等，

2) $B$ 有子集 $B^*$ 使 $A \sim B^*$。

但由 $\alpha > \beta$，則

3) $A$ 有子集 $A^*$ 使 $B \sim A^*$。

由 2) 及 3) 乃得 $A \sim B$，此事與 1) 矛盾。

**系 2** 設 $\alpha, \beta, \gamma$ 是三個勢。若

$$\alpha < \beta, \quad \beta < \gamma,$$

則

$$\alpha < \gamma.$$

換言之，關係"$<$"對於勢是傳遞的。

事實上，假設 $A$, $B$, $C$ 三集的勢是 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$。則由 $A\sim B^*\subset B$, $B\sim C^*\subset C$，得 $A\sim C^{**}\subset C^*$。現在只要證明 $A$,$C$ 不對等就好了。如果 $A\sim C$，則由 $A\sim C^{**}$，得着 $C\sim C^{**}$。又由定理 4，得 $C^*\sim C$，從而 $B\sim C$，於是 $\beta=\gamma$，此語與假定矛盾。

**注意**　由定義 2 得到下列的事實：若 $A\sim B^*\subset B$，則或是 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 或是 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$。若簡記作

$$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}},$$

則定理 5 的別種形式是：

如是 $\alpha\geqslant\beta$ 和 $\alpha\leqslant\beta$ 都成立，那末 $\alpha=\beta$。

設 $m$ 及 $n$ 爲二個自然數，則下面三個關係式

$$m=n,\ m<n,\ m>n$$

中務必成立一個且只成立一個。在第十四章中我們將要證明對於兩個勢 $\alpha$, $\beta$，下面三個關係

$$\alpha=\beta,\ \alpha<\beta,\ \alpha>\beta$$

至少成立一個。這叫做勢的三歧性。

下面是定理 5 的一個應用。

**定理 6**　區間 $[0,\ 1]$ 上所定義的連續函數的全體組成一集 $\Phi$, $\Phi$ 的勢是 $c$。

**證明**　設 $\Phi^*=\{\sin\ x+k\}$ ($k$ 是實數)，則 $\Phi^*\subset\Phi$ 且 $\overline{\overline{\Phi}}{}^*=c$，因此

$$\overline{\overline{\Phi}}\geqslant c \tag{1}$$

所以證明

$$\overline{\overline{\Phi}}\leqslant c \tag{2}$$

就好了。

設 $H$ 是實數數列

$$[u_1,\ u_2,\ u_3\cdots]$$

的全體。由 § 4 的定理 7, $\overline{\overline{H}}=c$。

將 $[0, 1]$ 中所有的有理數列爲

$$r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots.$$

對於每一個 $f(x)\in\Phi$, 令 $H$ 中的數列

$$a_f=[f(r_1), f(r_2), f(r_3), \cdots]$$

與之對應。當 $f(x)$ 與 $g(x)$ 不相同時, $a_f\neq a_g$。

事實上, $a_f=a_g$ 乃表示 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的一切的有理點 $x$ 取值相同。由於函數的連續性, $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中任何點取值亦相同, 於是 $f(x)=g(x)$。

上面的話表示: 記 $H^*=\{a_f\}$, 則 $\Phi\sim H^*$。但因 $H^*\subset H$ 和 $\overline{\overline{H}}=c$, 故得關係式(2)。定理於是證畢。

## 第一章的習題

1. 單調函數的不連續點的全體至多爲一可列集, 試證之。

2. 試作 $(0, 1)$ 與 $[0, 1]$ 間的一對一的對應。

3. 證明 $f=2^c$。

4. 設 $A=B+C$, $\overline{\overline{A}}=c$, 則 $B$ 與 $C$ 中, 至少有一集的勢是 $c$。

5. 例如 $f(x)$ 具有如下的特性: 對於每一個 $x_0$ 有正數 $\delta$ 與之對應, 當 $|x-x_0|<\delta$ 時, $f(x)\geqslant f(x_0)$; 那末 $f(x)$ 的函數值的全體至多成一可列集。

6. 在 § 3 的定理 4, 5, 6, 7 及在 § 4 的定理 3 及定理 4 中, 諸被加集無公共元素的條件是可以除去的, 試說明之。

7. 證明 $AB+C=(A+C)(B+C)$。且加以推廣。

8. 設 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 爲一系列的集, 若記 $\overline{A}$ 爲這樣元素的全體, 有無限多個 $A_n$ 都含有這種元素。又記 $\underline{A}$ 爲這樣元素的全體, 祇有有限個的 $A_n$ 不含這種元素。證明

$$\overline{A}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}A_k, \quad \underline{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}A_k.$$

9. 如果 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $\overline{\overline{A}}=c$, 則至少有一個 $A_n$ 的勢是 $c$。

# 第二章　點集

在本章中專論直線上點的集。實數的全體所成之集記之以 $Z$。在下面所說到的"點"，"閉區間""區間"等語都是有算術意義的。例如："點 $y$ 位在 $x$ 的右面"就是 $y>x$。

## §1　極限點

**定義 1**　設 $E$ 是一點集，$x_0$ 是一點。如任何區間含有 $x_0$ 的除 $x_0$ 而外至少還含有 $E$ 的一點的話，稱 $x_0$ 爲 $E$ 的一個極限點。

**注意**

1）$E$ 的極限點 $x_0$ 本身不一定屬於 $E$。

2）$E$ 的點 $x_0$，假如不是 $E$ 的極限點，則稱爲 $E$ 的孤立點。

3）如 $x_0$ 是 $E$ 的極限點，則任一區間 $(\alpha,\beta)$ 含有 $x_0$ 的必含有 $E$ 的無限個的點。

注意中 3）的證明：如果在 $(\alpha,\beta)$ 中只含有 $E$ 的有限個的點，假設這種點之異於 $x_0$ 者爲 $\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n$. 又設 $\delta$ 爲下列諸數 $|x_0-\xi_1|$，$|x_0-\xi_2|,\cdots,\ |x_0-\xi_n|,\ x_0-\alpha,\ \beta-x_0$ 中之最小數。那末，區間 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 不含 $\xi_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 中的任何一個，也就是除了 $x_0$ 而外不含 $E$ 中其他的點。因之 $x_0$ 不是極限點。

從另一觀點出發也可達到極限點的概念。爲此，我們來證明下面的命題。

**定理 1**　$x_0$ 爲 $E$ 的極限點的必要且充分的條件是：$E$ 有點列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0$，當 $n\neq m$ 時 $x_n\neq x_m)$ 適合

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

**證明** 條件的充分性一望而知。今證其必要性。

設 $x_0$ 爲 $E$ 之極限點。先在 $(x_0-1, x_0+1)$ 中選取一點 $x_1$ 屬於 $E$ 而異於 $x_0$。然後在 $\left(x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2}\right)$中選取一點 $x_2\in E$ 異於 $x_0$ 亦異於 $x_1$。一般的說：在 $\left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right)$中選取一點 $x_n$ 屬於$E$而異於$x_0$亦異於先取好的 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$。如此乃得數列 $\{x_n\}$，而是

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

利用這個定理可將定義 1 變爲另一種形式。

**定義 2** 設$E$是一點集，$x_0$ 是一點。假如$E$有點列 $\{x_n\}$ ($x_n\neq x_0$；當 $n\neq m$ 時 $x_n\neq x_m$) 收斂於 $x_0$，稱 $x_0$ 是 $E$ 的一個極限點。

**定理 2** （波爾釆諾-伐爾斯脫勞司）凡有界無限集$E$至少有一個極限點（但此極限點不一定屬於 $E$)。

**證明** 因爲 $E$ 是有界，所以有閉區間 $[a, b]$ 包含 $E$。

設
$$c=\frac{a+b}{2},$$

兩個閉區間 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 中，至少有一個含有 $E$ 的無限個點。否則 $E$變成有限集了。設具有上述性質的那個閉區間是$[a_1, b_1]$。如果 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 均各含有$E$的無限個點，則取 $[a_1, b_1]$ 爲其中任何一個好了。

然後設

$$c_1=\frac{a_1+b_1}{2}.$$

同理，$[a_1, c_1]$ 及 $[c_1, b_1]$ 二者之中至少有一個含有$E$的無限個點，今以 $[a_2, b_2]$ 記之。如此手續進行不已，得到一系列的閉區間

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\cdots,$$

在其中的每一個 $[a_v, b_v]$ 中含有 $E$ 的無限個點，且

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 按照一個熟知的極限定理，必有一個點 $x_0$ 含在所有的 $[a_v, b_v]$ 之中，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

今證 $x_0$ 是 $E$ 的極限點。設 $(\alpha, \beta)$ 爲含有 $x_0$ 的任一區間，則當 $n$ 適當大時，

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta).$$

所以 $(\alpha, \beta)$ 含有 $E$ 的無限個點。由是 $x_0$ 是 $E$ 的極限點。

所當注意的，定理中"有界"一語不能除去。例如 $E = N$, $N$ 是自然數的全體。那末 $E$ 是無限集，可是沒有極限點。

在應用上有時將定理 2 寫成另外的形式，是就數列而言的。

如對每一個 $n$, 對應一個定數 $x_n$, 則得數列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots, \tag{*}$$

其中任何兩數可以是相同的。例如

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1, \cdots\cdots$$

是一個無限數列；如果將它看成點集，那末只有兩個點，倒是一個有限集。

如果有常數 $K$, 對任一 $n$ 有

$$|x_n| < K \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

則稱 (*) 爲有界。

波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理還可以述之如下：

**定理 2*** 從任一有界數列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots \tag{*}$$

必定可以選取一個收斂的子數列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \cdots\cdots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\cdots).$$

**證明**　將(*)中每一項 $x_n$ 看作點。如果(*)所表示的點集是有限集，那末必有點在(*)中出現無限次。假使這個點是 $\xi$，而

$$x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \cdots = \xi,$$

那末 $\{x_{n_k}\}$ 就是我們所需要的子數列。

如果(*)所表示的集 $E$ 是一無限集，那末由定理 2，$E$ 有極限點 $x_0$。$E$ 中可選取一點列

$$x_{m_1},\ x_{m_2},\ x_{m_3}, \cdots\cdots \qquad (**)$$

以 $x_0$ 爲極限點，此數列的每一項各不相同，其指標 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ 也是各不相同。

今取 $n_1 = m_1$，取 $n_2$ 爲在 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ 中第一個大於 $n_1$ 的數，取 $n_3$ 爲 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ 中第一個大於 $n_2$ 的數，以下仿此。於是得到

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3}, \cdots\cdots$$

其指標 $n_\nu$ 是單調增加的。此數列乃爲(**)的子數列，所以

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

定理因此證畢。

## §2　閉集

與極限點的概念緊密聯系着的我們還有下面一連串的定義。

**定義**　設 $E$ 爲一點集，

1. $E$ 的所有極限點所成之集稱爲 $E$ 的導集，記爲 $E'$。
2. 如果 $E' \subset E$，則稱 $E$ 爲閉集。
3. 如果 $E \subset E'$，則稱 $E$ 爲己密集。
4. 如果 $E = E'$，則稱 $E$ 爲完全集。

5. 點集 $E+E'$ 稱爲 $E$ 的包而以 $\overline{E}$ 記之。

由上所述，閉集就是它含有它的所有極限點的集。己密集乃是不含孤立點的集。完全集既爲閉的又是己密的。

今舉數例以明之。

例

1. $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$, $E'=\{0\}$. $E$ 不是閉集，也不是己密集。

2. $E=(a, b)$, $E'=[a, b]$. $E$ 爲己密的，但不是閉的。

3. $E=[a, b]$, $E'=[a, b]$. $E$ 爲完全集。

4. $E=Z$, $E'=Z$. 所以實數的全體成一完全集。

5. $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, 0\right\}$, $E'=\{0\}$。$E$ 是閉的，但不是己密的。

6. $E=R$（有理數的全體），$E'=Z$. $E$ 是己密的但不是閉的。

7. $E=0$, $E'=0$. 故空集是完全集。

8、$E$ 爲有限集，$E'=0$. 故一切有限集是閉的，但不是己密的。

下面我們用一些較複雜的但是有趣味的例子來研究閉集及完全集。

**定理 1** 任何集 $E$ 的導集 $E'$ 必爲閉集。

**證明** 若 $E'$ 是有限集，$E'$ 沒有極限點，所以是閉集。若 $E'$ 是一無限集，設 $x_0$ 爲 $E'$ 的一個極限點。任意取一個包含 $x_0$ 的區間 $(\alpha, \beta)$。由極限點的定義，$(\alpha, \beta)$ 中必含有 $E'$ 的點 $z$。因此 $(\alpha, \beta)$ 中必含有無限個 $E$ 之點（圖 5），卽 $x_0$ 同時也是 $E$ 的極限點。因此，$x_0 \in E'$。由此觀之，$E'$ 含有他的所有極限點，所以 $E'$ 是閉集。

$\alpha$ ( —— $x_0$ —— $z$ —— ) $\beta$

圖 5

**定理2** 如果 $A\subset B$, 則 $A'\subset B'$.

這是顯而易見的事。

**定理3** $(A+B)'=A'+B'$.

**證明** 由定理 2, 因 $A$, $B$ 均爲 $A+B$ 的子集,所以 $A'\subset(A+B)'$, $B'\subset(A+B)'$, 於是

$$A'+B'\subset(A+B)'.$$

另一方面可證

$$(A+B)'\subset A'+B'. \qquad (*)$$

因爲假使

$$x_0\in(A+B)',$$

則在 $A+B$ 中存在點列 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$, 而

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

如果在點列 $\{x_n\}$ 中有無限個的點屬於 $A$, 則 $x_0$ 乃爲 $A$ 的極限點, 從而 $x_0\in A'\subset A'+B'$。如果點列 $\{x_n\}$ 中僅有有限個的點屬於 $A$, 則 $x_0\in B'\subset A'+B'$。不論那種情形, 總之 $x_0\in A'+B'$。故得(*)。於是定理證畢。

**系1** 任何集 $E$ 的包 $\overline{E}$ 爲閉集。

事實上,

$$(\overline{E})'=(E+E')'=E'+(E')'\subset E'+E'=E'\subset\overline{E}.$$

**系2** 點集 $E$ 爲閉集的必要且充分的條件是

$$E=\overline{E}.$$

由系 1, 當 $E=\overline{E}$, 則 $E$ 爲閉集, 所以條件是充分的。又若 $E$ 爲閉集,則由

$$\overline{E}=E+E'\subset E\subset\overline{E},$$

得 $E=\overline{E}$.

下面的定理也可以從定理 3 導出。

**定理 4**　有限個閉集的和集是閉集。

**證明**　先就二個集的場合證之。設 $F_1, F_2$ 爲二個閉集，

$$\Phi = F_1 + F_2.$$

由定理 3，得

$$\Phi' = F_1' + F_2'.$$

但 $F_1' \subset F_1, F_2' \subset F_2$，所以

$$\Phi' \subset \Phi.$$

所以定理當二個閉集時成立。由數學歸納法，知定理 4 在一般場合下也成立。

**注意**　無限個閉集的和集可能不是閉集。

例如取

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

則每一個 $F_n$ 是閉集，但其和集

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$$

不是閉集。

關於閉集的通集則有下面的定理：

**定理 5**　任意個閉集的通集是閉集。

**證明**　設 $F_\xi$ 表示閉集，對於不同的 $\xi$ 表示不同的集。所有 $F_\xi$ 的通集記以 $\Phi$，

$$\Phi = \prod_{\xi} F_\xi.$$

因 $\Phi \subset F_\xi$，所以 $\Phi' \subset F_\xi'$，因之 $\Phi' \subset F_\xi$。此關係式對於所有的 $\xi$ 成立，所以

$$\Phi' \subset \prod_{\xi} F_\xi,$$

即 $\Phi'\subset\Phi$，所以 $\Phi$ 是閉集。

**補助定理** 設 $E$ 爲有上界（有下界）的集，又設 $\beta=\sup E$ ($\alpha=\inf E$)，則

$$\beta\in\overline{E}\quad(\alpha\in\overline{E}).$$

**證明** 如果 $\beta\in E$，則當然 $\beta\in\overline{E}$。設 $\beta\overline{\in}E$。那末對於任一正數 $\varepsilon$，存在 $x\in E$ 適合 $x>\beta-\varepsilon$，所以在任何一個包含 $\beta$ 的區間中必定含有 $E$ 中的點，根據假定 $\beta\overline{\in}E$，此點當然不是 $\beta$。由此，$\beta$ 是 $E$ 之極限點，因而 $\beta\in E'\subset\overline{E}$。總之 $\beta\in\overline{E}$。

**定理 6** 有上界（下界）的閉集 $F$ 必有最右（最左）的點。

事實上，設 $\beta=\sup F$，則

$$\beta\in\overline{F}=F.$$

**定義 6** 設 $E$ 爲點集，$\mathfrak{M}$ 爲區間集。如果對於每一個 $x\in E$，有一個區間 $\delta\in\mathfrak{M}$，使

$$x\in\delta,$$

則稱 $E$ 被 $\mathfrak{M}$ 所遮蓋。

**定理 7**（波雷耳） 如果有界閉集 $F$ 被區間集 $\mathfrak{M}$ 所遮蓋，那末從 $\mathfrak{M}$ 中可以選取有限個區間所成的集 $\mathfrak{M}^*$，也遮蓋 $F$。

**證明** 我們用反證法來證明。假設沒有 $\mathfrak{M}^*$ 如定理所說，那末 $F$ 必爲無限集。因爲 $F$ 是有界，我們可假設 $F\subset[a,b]$。置

$$c=\frac{a+b}{2},$$

則 $F[a,c]$ 及 $F[c,b]$ 中至少有一個——記它做 $F[a_1,b_1]$——不能被有限集 $\mathfrak{M}^*$ 所遮蓋。若 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 均具有此性質，則取 $[a_1,b_1]$ 爲其中任何一個好了。顯然的，$F[a_1,b_1]$ 仍爲無限集。

現在取
$$c_1=\frac{a_1+b_1}{2}.$$

對於 $[a_1, c_1]$ 和 $[c_1, b_1]$ 處理如前，得着 $[a_2, b_2]$。點集 $F[a_2, b_2]$ 不能爲一 $\mathfrak{M}^*$ 所遮蓋。將此手續繼續進行，得：

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset[a_3, b_3]\supset\cdots\cdots,$$

點集

$$F[a_n, b_n] \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

不能被 $\mathfrak{M}$ 之有限子集 $\mathfrak{M}^*$ 所遮蓋，並且都是無限集。

因爲 $[a_n, b_n]$ 之長爲 $\frac{b-a}{2^n}$，當 $n$ 無限增大時接近於 0。所以所有的 $[a_n, b_n]$ 有一公共點 $x_0$，且

$$\lim a_n=\lim b_n=x_0.$$

但我們可證 $x_0$ 必屬於 $F$。爲此目的，我們首先從 $F[a_1, b_1]$ 中取一點 $x_1$，隨後在 $F[a_2, b_2]$ 中取一點 $x_2$ 但異於 $x_1$，接着再在 $F[a_3, b_3]$ 中取一點 $x_3$ 異於 $x_1$ 及 $x_2$，…….依照這種取法，從 $F[a_n, b_n]$ 取一點 $x_n$ 但異於先取好的 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$。於是得到 $F$ 中的點列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots .$$

因

$$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n,$$

所以

$$x_0=\lim x_n,$$

是乃表示 $x_0$ 爲 $F$ 的極限點。今 $F$ 爲閉集，故 $x_0\in F$。

因爲 $F$ 被 $\mathfrak{M}$ 所遮蓋，所以 $\mathfrak{M}$ 中有區間 $\delta_0\in\mathfrak{M}$ 遮蓋着 $x_0$。但是當 $n$ 適當大的時候，(圖 6)

$$[a_n, b_n]\subset\delta_0,$$

因之，

$$F\cdot[a_n, b_n]\subset\delta_0.$$

這表示 $F[a_n, b_n]$ 被 $\mathfrak{M}$ 中一個區間就遮蓋了，此結果與 $[a_n, b_n]$ 的取

法矛盾。由是定理得證。

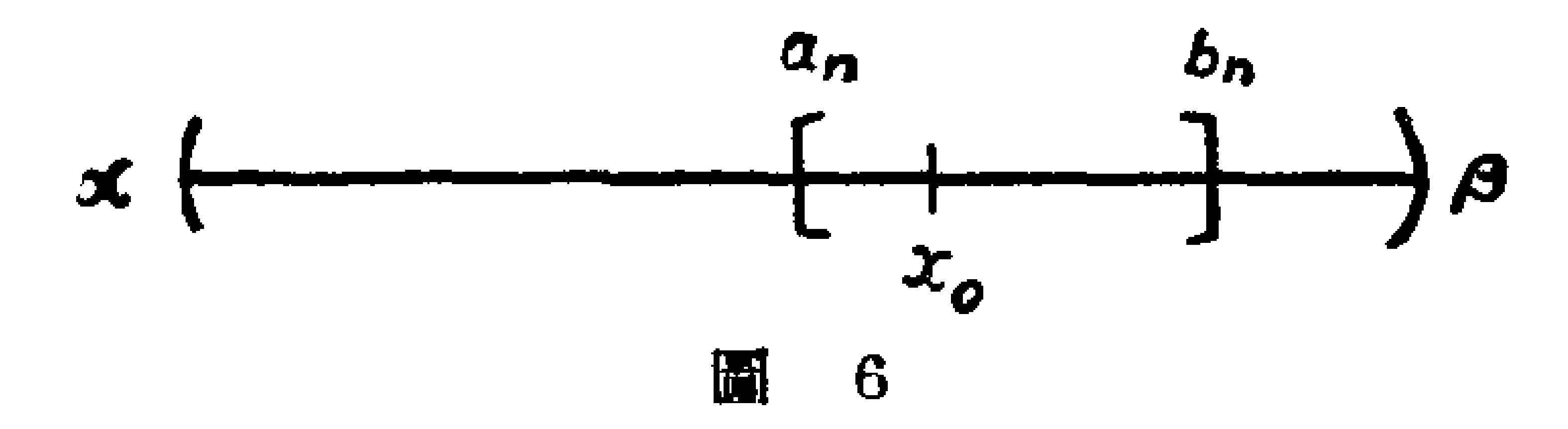



圖 6

**注意**　若除去有界或閉的假定，則定理不復爲真。

此事由下面的二個例子，即可明瞭。

例如 $N$ 是自然數全體所成之集。它是一個閉集（因 $N'=0$），但不是有界的。設

$$\mathfrak{M}=\left\{\left(n-\frac{1}{3},n+\frac{1}{3}\right)\right\}\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

則 $\mathfrak{M}$ 遮蓋 $N$。但是 $\mathfrak{M}$ 的任何有限子集不能遮蓋 $N$。因之有界的條件是不可缺的。

又如 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots\cdots\right\}$。$E$ 是一有界集，但是不是閉的。取 $\delta_n$ 爲包含 $\frac{1}{n}$ 的小區間，但使 $\delta_n$ 中不含有 $E$ 的其他的點。設 $\mathfrak{M}$ 爲由 $\delta_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 所成的區間集，則 $\mathfrak{M}$ 遮蓋 $E$，但是 $\mathfrak{M}$ 中有限個 $\delta_n$ 不能遮蓋 $E$。因之閉的條件也是不可缺的。

最後我們注意閉集的一個性質，利用這個性質可以簡化定理 7 的證明。

**定理 8**　設 $F$ 爲閉集，

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots \tag{*}$$

爲 $F$ 的一個點列。如果

$$\lim x_n=x_0,$$

則 $x_0\in F$.

事實上，如果點列(*)包含無限個不同的點，則 $x_0$ 爲 $F$ 之一極限點。如果(*)只含有有限個不同的點，那末此點列從某項以後，$x_n$ 就是 $x_0$，所以 $x_0\in F$。

## § 3　內點及開集

**定義 1**　對於一點 $x_0$，假如 $E$ 中有一個區間 $(\alpha,\beta)$ 含有 $x_0$，稱 $x_0$ 是 $E$ 之一內點。此時

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subset E.$$

所以，$E$ 之內點必屬於 $E$。

**定義 2**　$E$ 的點都是它的內點的時候，稱 $E$ 是一開集。

**例**

1. 區間 $(a,b)$ 爲一開集。
2. 實數的全體所成之集爲一開集。
3. 空集爲開集。
4. 閉區間 $[a,b]$ 不是開集，因爲它的端點不是內點。

**定理 1**　任意個開集的和集是一開集。

**證明**　設

$$S=\sum_{\xi}G_{\xi},$$

其中一切 $G_{\xi}$ 都是開集。設 $x_0\in S$，則 $x_0$ 屬於某一個 $G_{\xi_0}$。因爲 $G_{\xi_0}$ 是開集，所以有 $(\alpha,\beta)$ 如下：

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subset G_{\xi_0},$$

因之

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subset S$$

意即 $x_0$ 是 $S$ 之一內點。由是 $S$ 中任何點都是內點。所以 $S$ 是一開集。

**系**　凡集可由區間之和集表示的必爲開集。

**定理 2**　有限個開集的通集是開集。

**證明**　設

$$P=\prod_{k=1}^{n}G_k,$$

其中 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 都是開集。若 $P$ 是空集的話，$P$ 是一開集。如果 $P$ 不是空集，設 $x_0 \in P$，則 $x_0 \in G_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。對於每一個 $k$ 有 $(\alpha_k, \beta_k)$ 滿足

$$x_0 \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k.$$

置

$$\lambda = \max(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\,;\ \mu = \min(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),$$

則

$$x_0 \in (\lambda, \mu) \subset P,$$

是即表示 $x_0$ 爲 $P$ 的內點。

定理證畢。

**注意** 無限個開集的通集未必是一開集。

事實上，諸開集

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

的通集

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

不是開集。

**定義 3** 設 $E$ 和 $S$ 是兩個點集。當 $E \subset S$ 時，稱差集 $S-E$ 爲集 $E$ 關於 $S$ 的餘集，記作

$$C_s E.$$

特別，對於 $Z=(-\infty, +\infty)$，簡稱 $C_z E$ 爲 $E$ 的餘集，簡記作

$$CE.$$

利用餘集的概念，可得閉集與開集間的關係。

**定理 3** 如果 $G$ 是一開集，則其餘集 $CG$ 是一閉集。

**證明** 設 $x_0 \in G$，則 $G$ 中必有區間 $(\alpha, \beta)$ 包含 $x_0$：

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G.$$

區間 $(\alpha, \beta)$ 中不含 $CG$ 中之任何點，所以 $x_0$ 不是 $CG$ 的極限點。因此凡 $CG$ 的極限點一定不屬於 $G$，所以屬於 $CG$。故 $CG$ 爲一閉集。

**定理 4** 如果 $F$ 是一閉集，則 $CF$ 是一開集。

**證明** 餘集 $CF$ 中的任一點 $x_0$ 不是 $F$ 的極限點。所以有區間 $(\alpha, \beta)$ 包含 $x_0$ 而不包含 $F$ 中其他的點，而 $x_0$ 本身也不是 $F$ 中的點，由是 $(\alpha, \beta) \subset CF$。從而 $x_0$ 乃爲 $CF$ 之一內點，所以 $CF$ 是一開集。

集 $Z$ 與空集 0 互爲餘集。所以 $Z$ 和 0 都是開集，也都是閉集。

易知下列諸事：1)如果 $G$ 爲開集，$G \subset [a, b]$ 時，則 $[a, b] - G$ 爲閉集。2)如果 $F$ 爲閉集，$F \subset (a, b)$ 時，則 $(a, b) - F$ 爲開集。上述二事由下列二式

$$[a, b] - G = [a, b] \cdot CG$$

$$(a, b) - F = (a, b) \cdot CF$$

卽可明瞭。

不過，$F$ 爲閉集，$F \subset [a, b]$ 時，$[a, b] - F$ 不一定是開集。例如 $F = [0, 1]$，$[a, b] = [0, 2]$，則 $[a, b] - F = (1, 2]$。

爲此，我們給以下面的定義。

**定義 4** 設 $E$ 不是空集，$a = \inf E$，$b = \sup E$，則稱閉區間 $S = [a, b]$ 爲包含 $E$ 的最小閉區間。

**定理 5** 若 $S$ 是包含有界閉集 $F$ 的最小閉區間，則 $F$ 關於 $S$ 的餘集

$$C_s F = [a, b] - F$$

是一開集。

**證明** 證明

$$C_s F = (a, b) \cdot CF$$

就好了。設 $x_0 \in C_S F$，則

$$x_0 \in [a,b]，x_0 \overline{\in} F.$$

由 §2 的定理 6，$a$ 與 $b$ 都屬於 $F$。故 $x_0 \neq a$，$x_0 \neq b$。所以 $x_0 \in (a,b)$。又 $x_0 \in CF$，因之 $x_0 \in (a,b) \cdot CF$。所以

$$C_S F \subset (a,b) \cdot CF.$$

左端 $C_s F = [a,b] \cdot CF$，故 $(a,b)\, CF \subset C_s F$。於是得到

$$C_S F = (a,b) \cdot CF.$$

定理證畢。

## §4 距離及隔離性

**定義 1** 設 $x,y$ 爲直線上的二點。數

$$|x-y|$$

稱爲點 $x$ 與 $y$ 間的距離，記之以

$$\rho(x,y).$$

顯然的，$\rho(x,y)=\rho(y,x)\geqslant 0$，且等式

$$\rho(x,y)=0$$

當 $x=y$ 而且只有當 $x=y$ 時成立。

**定義 2** 設 $x_0$ 爲某一點，$E$ 爲一非空的點集。$x_0$ 與 $E$ 中的點的距離之下確界稱爲點 $x_0$ 與點集 $E$ 間的距離，記作 $\rho(x_0,E)$ 或是 $\rho(E,x_0)$。用式子表示時，卽

$$\rho(x_0, E)=\inf\{\rho(x_0, x)\} \qquad (x\in E).$$

顯然的，$\rho(x_0, E)$ 一定存在，這是一正數或 0。如果 $x_0 \in E$，則

$$\rho(x_0, E)=0.$$

所當注意的，其逆未必爲眞，例如 $x_0=0$，$E=(0, 1)$，則 $\rho(x_0, E)=0$，但 $x_0 \overline{\in} E$。

**定義 3** 設 $A$ 和 $B$ 是兩個點集。作 $A$ 的點與 $B$ 的點間的距離的下確界，稱爲 $A$ 與 $B$ 間之距離，記以 $\rho(A, B)$，即

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\} \qquad (x\in A, y\in B).$$

顯然的，$\rho(A, B)$ 必存在，且 $\rho(A,B)=\rho(B,A)\geqslant 0$。

如果 $A$ 及 $B$ 有共同點，則

$$\rho(A, B)=0,$$

但其逆不眞。例如

$A=(-1,0)$, $B=(0, 1)$，則 $\rho(A, B)=0$，但 $AB=0$。

我們注意到這個事實：所謂點 $x_0$ 與點集 $E$ 的距離，也就是只含一個點 $x_0$ 的點集 $\{x_0\}$ 與另一點集 $E$ 間的距離。這個事實頗爲有用。

**定理 1** 設 $A$ 及 $B$ 爲兩個不空的閉集，並且其中至少有一個是有界的，那末 $A$ 有點 $x^*$, $B$ 有點 $y^*$ 適合

$$\rho(x^*, y^*)=\rho(A, B).$$

**證明** 從下確界的定義，對於每一個自然數 $n$，存在

$$x_n \in A,\ y_n \in B$$

適合

$$\rho(A, B)\leqslant|x_n-y_n|<\rho(A, B)+\frac{1}{n}. \tag{1}$$

由假設，$A$ 及 $B$ 中至少有一個爲有界。我們可設 $A$ 爲有界集。那末 $\{x_n\}$ 是一有界數列。由波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理，其中有一收斂子數列：$x_{n_1}$, $x_{n_2}$, $x_{n_3}$, ……,

$$\lim x_{n_k}=x^*.$$

由於 $A$ 爲閉集，所以 $x^*\in A$。

現在我們來看 $\{y_{n_k}\}$。如果 $|x_{n_k}|<c$，那末從

$$|y_{n_k}|\leqslant|x_{n_k}|+|y_{n_k}-x_{n_k}|<c+\rho(A, B)+\frac{1}{n_k}\leqslant c+\rho(A, B)+1,$$

知道 $\{y_{n_k}\}$ 也是有界數列。因此，它必有如下的收斂子數列：

$$y_{n_{k_1}},\ y_{n_{k_2}},\ x_{n_{k_3}},\cdots\cdots,\ \lim y_{n_k}=y^*.$$

但 $B$ 是一閉集，所以 $y^*\in B$。

令

$$|y^*-x^*|=\lim|y_{n_k}-x_{n_k}|=\rho(A,\ B),$$

於是定理證畢。

如果定理中的 $A$ 和 $B$ 均非有界，則定理不眞。此可由下例明之。

設 $N=\{n\}$，$M=\left\{n+\frac{1}{2n}\right\}$，則因 $N'=M'=0$，$N$ 及 $M$ 都是閉集。顯然，$\rho(N,\ M)=0$，然因 $N\cdot M=0$，所以不存在如下的 $x^*$，$y^*$：$x^*\in N$，$y^*\in M$，$\rho(x^*,\ y^*)=0$。

又定理中 $A$ 與 $B$ 二集均爲閉的條件減爲其中祇有一個是閉集，那末定理就不成立。例如 $A=[1,\ 2)$，$B=[3,\ 5]$，則 $\rho(A,\ B)=1$。

下面是本定理的系。

**系 1** 設 $A$ 與 $B$ 都是閉集且其中至少有一個是有界點集。若 $\rho(A,\ B)=0$，則 $A$ 與 $B$ 相交。

**系 2** 設 $F$ 是一不空的閉集，$x_0$ 是任意的一點，那末 $F$ 中必有點 $x^*$ 適合

$$\rho(x_0,\ x^*)=\rho(x_0,\ F).$$

**系 3** 如果點 $x_0$ 與閉集 $F$ 滿足條件 $\rho(x_0,\ F)=0$，則 $x_0\in F$。

下面我們將引入一個重要的概念，就是所謂"隔離性"。不過事前還得證明兩個簡單的補助定理。

**補助定理 1** 設 $A$ 是一不空的點集，$d$ 是一正數。設 $B$ 表示適合 $\rho(x,\ A)<d$ 的 $x$ 的全體：

$$B=Z(\rho(x,\ A)<d).$$

則 $B$ 是一包含 $A$ 的開集。

**證明** 顯然 $A\subset B$。要證的是 $B$ 爲開集。

設 $x_0\in B$。則 $\rho(x_0, A)<d$，從而 $A$ 中必有點 $x^*$ 適合

$$\rho(x_0, x^*)<d.$$

置 $d-\rho(x_0, x^*)=h$。下面將證 $(x_0-h, x_0+h)$ 含在 $B$ 中。因此證得 $x_0$ 是 $B$ 的內點，也就是說 $B$ 是開集。

於 $(x_0-h, x_0+h)$ 中任取一點 $y$，則 $|y-x_0|<h$。又因 $|x_0-x^*|==d-h$，所以

$$|y-x^*|\leqslant|y-x_0|+|x_0-x^*|<h+d-h=d.$$

因此，$\rho(y, x^*)<d$。由是

$$\rho(y, A)<d,$$

從而 $y\in B$。由此得着

$$(x_0-h, x_0+h)\subset B,$$

補助定理證畢。

**補助定理 2**　設 $A_1, A_2$ 是如下的兩個不空點集：

$$\rho(A_1, A_2)=r>0.$$

設

$$B_1=Z\left(\rho(x, A_1)<\frac{r}{2}\right),\quad B_2=Z\left(\rho(x, A_2)<\frac{r}{2}\right).$$

則 $B_1 B_2=0$。

**證明**　假如 $B_1 B_2\neq 0$，有 $z\in B_1 B_2$。那末

$$\rho(z, A_1)<\frac{r}{2},\quad \rho(z, A_2)<\frac{r}{2}.$$

因此 $A_1$ 有點 $x_1$，$A_2$ 有點 $x_2$ 適合

$$|z-x_1|<\frac{r}{2},\quad |z-x_2|<\frac{r}{2},$$

由是，

$$|x_1-x_2|<r.$$

是必 $\rho(A_1, A_2)<r$，這是不可能的。補助定理證畢。

**定理 2** (隔離性) 對於兩個不相交的有界閉集 $F_1, F_2$ 必有如下的開集 $G_1$, $G_2$:

$$G_1 \supset F_1,\ G_2 \supset F_2,\ G_1 G_2 = 0.$$

**證明** 由定理 1 的系 1,

$$\rho(F_1, F_2) = r > 0.$$

餘下的證明只要置

$$G_i = Z\left(\rho(x,\ F_i) < \frac{r}{2}\right) \qquad (i=1,2),$$

應用補助定理 1 及補助定理 2 即行。

順便我們要提出下面的注意：定理中 $F_1$ 及 $F_2$ 爲有界的條件如果除去仍不失定理的眞實,此地不擬加以仔細討論。可是 $F_1$ 及 $F_2$ 是閉的條件是不能缺少的。例如取

$$A = [0, 1),\ B = [1, 2]$$

即明。

## § 5 有界開集及有界閉集的構造

**定義 1** 設 $G$ 是一開集。假如開區間 $(a, b)$ 完全含在 $G$ 中而其兩端都不屬於 $G$；即

$$(a, b) \subset G,\ a \overline{\in} G,\ b \overline{\in} G,$$

那末稱 $(a, b)$ 是 $G$ 之一構成區間。

**定理 1** 假如 $G$ 是一個不空的有界開集，那末 $G$ 的任一點必屬於其某一構成區間。

**證明** 設 $x_0 \in G$。置 $F = [x_0, +\infty) \cdot CG$。

因 $[x_0, +\infty)$ 與 $CG$ 都是閉集，又 $G$ 是有界集,所以 $F$ 是一個不空的閉集。在 $x_0$ 的左面沒有 $F$ 的點,所以 $F$ 是有下界的。設 $F$ 的最左的點是

$\mu$. 則 $\mu \geqslant x_0$。因 $x_0 \in G$, 故 $x_0 \overline{\in} F$。因此 $x_0 \neq \mu$。由是 $x_0 < \mu$。

注意 $\mu \overline{\in} G$ (因 $\mu \in F \subset CG$), 就會知道

$$[x_0, \mu) \subset G.$$

否則存在着如下的 $y$:

$$y \in [x_0, \mu),\ y \overline{\in} G,$$

因此

$$y \in F,\ y < \mu$$

此與 $\mu$ 的定義相抵觸。

總而言之，對於 $x_0 \in G$, 有如下的點 $\mu$:

1) $\mu > x_0$, 2) $\mu \overline{\in} G$, 3) $[x_0, \mu) \subset G$.

同樣可以證明有如下的點 $\lambda$:

1) $\lambda < x_0$, 2) $\lambda \overline{\in} G$, 3) $(\lambda, x_0] \subset G$.

由是得着 $G$ 的一個構成區間 $(\lambda, \mu)$, 它包含着點 $x_0$。定理證畢。

從定理 1 的證明，我們知道：凡是不空的有界開集是從它的構成區間所構成的。

**定理 2**　設 $(\lambda, \mu)$ 和 $(\sigma, \tau)$ 是開集 $G$ 的二個構成區間，那末它們或者是完全一致，或者是互不相交。

**證明**　假設 $(\lambda, \mu)$ 和 $(\sigma, \tau)$ 有共同點 $x$, 則必

$$\lambda < x < \mu, \quad \sigma < x < \tau.$$

若

$$\tau < \mu,$$

則 $\tau \in (\lambda, \mu)$, 但這是不可能的，因為

$$(\lambda, \mu) \subset G, \text{ 而 } \tau \overline{\in} G.$$

於是得到

$$\mu \leqslant \tau.$$

同理，

$$\tau \leqslant \mu.$$

所以 $\tau=\mu$。

仿此可得 $\sigma=\lambda$。因此 $(\lambda, \mu)$ 與 $(\sigma, \tau)$ 完全一致。

**系** 不空的有界開集 $G$ 的不同的構成區間之全體是一有限集或是可列集（集的元素是構成區間）。

事實上，如果我們對於每一個構成區間，取其中的一個有理數與之對應。這樣，$G$ 的構成區間所成之集與有理數所成之集對等。此集假如不是有限，一定是可列的。

綜合上述，得定理如下：

**定理 3** 每一不空有界開集 $G$ 可以表示爲有限個或可列個不相重疊的區間的和集；每一個區間完全含在 $G$ 中，而其兩端點都不屬於 $G$，即

$$G=\sum_k(\lambda_k, \mu_k), \qquad \lambda_k \overline{\in} G, \ \mu_k \overline{\in} G.$$

其逆定理我們在前面已經證過：凡集可用開區間之和集表示的一定是開集。

**定理 4** 設 $G$ 是一不空的有界開集，$(a, b)$ 是一個含在 $G$ 中的區間。則 $G$ 含有一個構成區間 $(\lambda, \mu)$ 適合於 $(a, b) \subset (\lambda, \mu)$。

**證明** 設 $x_0 \in (a, b)$，則 $x_0 \in G$。$G$ 必有構成區間 $(\lambda, \mu)$ 包含 $x_0$，現在證明 $(a, b) \subset (\lambda, \mu)$ 好了。

如果

$$\mu < b,$$

則 $\mu \in (a,b)$，但這是不可能的，因爲 $\mu \overline{\in} G$。由是

$$b \leqslant \mu.$$

同樣，

$$\lambda \leqslant a,$$

因此，

$$(a, b)\subset(\lambda, \mu),$$

定理證畢。

下面我們研究有界閉集的構造。

假設 $F$ 是一個有界閉集，$S$ 是包含 $F$ 的最小閉區間。則 $C_S F$ 是一開集。應用定理 3，得下面的定理。

**定理 5**　不空的有界閉集 $F$，假如它不是一個閉區間，則一定是從一個閉區間除去有限個或可列個不相重疊的(開)區間(其兩端屬於 $F$)所成。

其逆顯然亦眞：從一個閉區間除去一個區間集得着閉集。

稱 $C_S F$ 的構成區間是 $F$ 的餘區間。

因爲完全集是閉集，所以對於完全集可以應用定理 5，現在我們發生下面的問題：要使一個閉集成爲完全集，它的餘區間應具有些什麽條件？下面的定理回答了這個問題。

**定理 6**　設 $F$ 是一個不空的有界閉集，$S=[a, b]$ 是包含 $F$ 的最小閉區間。則

1.　$F$ 的兩個餘區間的共同端點 $x_0$ 是 $F$ 的孤立點。

2.　如果 $S$ 的端點 $a$ (或 $b$) 同時是 $F$ 的一個餘區間的端點，那末它也是 $F$ 的孤立點。

3.　除了 1. 和 2. 中的孤立點而外，$F$ 沒有其他的孤立點。

**證明**　1. 和 2. 的結果很明白。所要證明的是 3. 設 $x_0$ 是 $F$ 的孤立點。先假定 $a<x_0<b$。由孤立點的定義，有區間 $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$，在 $(\alpha, \beta)$ 中除 $x_0$ 而外不含 $F$ 的其他點。因區間 $(x_0, \beta)$ 中不含 $F$ 的點，所以 $(x_0, \beta)\subset C_S F$。由定理 4，$F$ 有一個餘區間 $(\lambda, \mu)$ 包含 $(x_0, \beta)$。因 $\lambda<x_0$ 表示 $x_0$ 不屬於 $F$，與假定矛盾；所以 $\lambda\geqslant x_0$。從 $(x_0, \beta)\subset(\lambda, \mu)$ 知 $\lambda>x_0$

亦不成立，故必 $\lambda=x_0$。即 $x_0$ 是 $F$ 的一個餘區間的左端。同樣的可證 $x_0$ 是 $F$ 的某個餘區間的右端。故得 3. 之證。當 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 時亦可同法證明之。

從定理 6 得着如下的定理：

**定理 7**　不空的有界完全集 $P$，假如它不是一個閉區間，它一定是從一個閉區間除去有限個或可列個不相重疊的區間所成，這種區間之間沒有共同端點，且與原來的閉區間也無共同端點。其逆，凡從上述方法而得的集是一完全集。

下面舉一個關於完全集的有趣並且重要的例子。

康脫的集 $G_0$ 與 $P_0$ 將閉區間 $U=[0,1]$ 用分點 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$ 分成三部分，而取去$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$。將每一個留下來的閉區間 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$ 又各各等分成三部分（對於第一個閉區間用 $\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$ 當作分點，對於第二個閉區間用 $\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$ 當作分點），而各各取去中間的區間$\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$與$\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$。再將留下來的閉區間等分成三部分而取去其中間的一個區間。將此手續逐次繼續，以至無限。

這樣，從 $[0,1]$ 取去了一個開集 $G_0$。$G_0$ 是可列個區間的和集：

$$G_0=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)+\left[\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)+\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)\right]+\cdots\cdots.$$

留下來的集記作 $P_0$，由定理 7，$P_0$ 是一完全集。

稱 $G_0$ 及 $P_0$ 爲康脫的集。

現在利用三進位小數，來討論康脫集的算術性質。

用三進位小數將區間$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$中的數 $x$ 表示爲

$$x=0,\ a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots\qquad (a_k=0,\ 1,\ 2),$$

必須是

$$a_1=1.$$

區間$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$的兩端各有兩種表示法:

$$\frac{1}{3}=\begin{cases}0,100000\cdots\cdots\\0,022222\cdots\cdots\end{cases};\qquad \frac{2}{3}=\begin{cases}0,12222\cdots\cdots\\0,20000\cdots\cdots\end{cases}.$$

從 $[0, 1]$ 除了$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，其餘的點用三進位小數表示時，它的第一位小數一定不是 1。

圖 7

因此，構成 $G_0$ 的第一步手續，就是從 $U$ 取出在三進位小數表示中第一位小數必定是 1 的那些點而且只取出那些點。

仿此，在第二步手續中所取出的點用三進位小數表示時，小數第二位的數字必定是 1，而且這樣的點一定取出。以下類推。

因此，在取出 $G_0$ 以後，所留下來的點，用三進位小數

$$0,\ a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

表示時，可使沒有一個 $a_k$ 是 1，而且這樣的點一定留下來。

簡言之，$G_0$ 乃是從這種點所成，它由三進位小數表示時不可能不出現數字 1。而用三進位小數表示 $P_0$ 中的點時，決無數字 1 出現。

**系** 康脫的完全集 $P_0$ 具有勢 $c$。

事實上，

$$P_0=\{0,\ a_1a_2a_3\cdots\cdots\}\qquad a_k=\begin{cases}0\\2\end{cases},$$

由第 1 章 § 4 的定理 8，知 $P_0$ 的勢是 $c$。

$G_0$ 的一切端點成一可列集，所以勢為 $c$ 的康脫的集 $P_0$ 除了取去的區間的端點而外還含有其他的點。這種"非端點"的點，用三進位小數

$$0,\ a_1a_2a_3\cdots\cdots\qquad a_k=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$

表示時，決不會從某一位開始全是 0 或全是 2。

## §6 凝聚點 閉集的勢

在 §5 中我們得到，康脫集 $P_0$ 的勢是 $c$。現在要證：所有不空的完全集均有此性質。

**定理1** 凡不空的完全集，其勢是 $c$。

**證明** 設 $P$ 是一個不空的完全集。取點 $x\in P$ 及一個包含 $x$ 的區間 $\delta$。由於 $x$ 不是 $P$ 的孤立點，所以 $P\delta$ 是一個無限集。

於 $P\delta$ 中取兩個相異的點 $x_0$ 和 $x_1$，又作具有下列諸性質的兩個區間 $\delta_0, \delta_1$：當 $i=0,1$ 時，

$$1)\ x_i\in\delta_i,\quad 2)\ \delta_i\subset\delta,\quad 3)\ \overline{\delta_0}\,\overline{\delta_1}=0,\quad 4)\ m\delta_i<1$$

($\overline{\delta}$ 表示區間 $\delta$ 的包，$m\,\delta$ 表示 $\delta$ 的長)。

因爲 $x_0$ 是 $P$ 的極限點，所以在 $\delta_0$ 中有無數個點屬於 $P$。於其中取這樣的相異兩點 $x_{0,0}$ 和 $x_{0,1}$。又作如下的區間 $\delta_{0,0}$ 和 $\delta_{0,1}$：當 $k=0,1$ 時，

$$1)\ x_{0,k}\in\delta_{0,k},\quad 2)\ \delta_{0,k}\subset\delta_0,\quad 3)\ \overline{\delta_{0,0}}\,\overline{\delta_{0,1}}=0,\quad 4)\ m\delta_{0,k}<\frac{1}{2}.$$

對於點 $x_1$ 我們施行同樣的手續。如是得着如下的點 $x_{i,k}(i,k=0,1)$ 和區間 $\delta_{i,k}$：

$$1)\ x_{i,k}\in F\delta_{i,k},\quad 2)\ \delta_{i,k}\subset\delta_i,$$
$$3)\ \overline{\delta}_{i,k}\cdot\overline{\delta}_{i',k'}=0\Big((i,k)\neq(i',k')\Big),\quad 4)\ m\delta_{i,k}<\frac{1}{2}.$$

這種手續繼續進行，至 $n$ 次我們得着如下的點

$$x_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\quad (i_k=0,1;\ k=1,2,\cdots,n)$$

和區間 $\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$：

$$1)\ x_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\in P\cdot\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n},\quad 2)\ \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}\subset\delta_{i_1,\cdots,i_{n-1}},$$

3) $\bar{\delta}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \cdot \bar{\delta}_{i'_1, i'_2, \cdots, i'_n} = 0 \quad \big((i_1, i_2, \cdots, i_n) \neq (i'_1, i'_2, \cdots, i'_n)\big)$,

4) $m\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n} < \frac{1}{n}$.

因爲每一個點 $x_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$ 是 $P$ 的極限點，所以在 $P' \cdot \delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$ 中可以取兩個相異的點

$$x_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 0} \text{ 和 } x_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 1}$$

又可以作如下的兩個區間：

$$\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 0} \text{ 和 } \delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 1},$$

當 $i_{n+1}=0, 1$ 時

1) $x_{i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}} \subset \delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}}$,

2) $\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}} \subset \delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$,

3) $\bar{\delta}_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 0} \cdot \bar{\delta}_{i_1, i_2, \cdots, i_n, 1} = 0$,

4) $m\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}} < \frac{1}{n+1}$.

我們假設這種手續對於所有的自然數 $n$ 均已施行。於是對於每一無限數列

$$(i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots) \qquad (i_k=0, 1)$$

我們有一個點

$$z_{i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots}$$

與之對應。而這個點乃是一列閉區間的通集

$$\bar{\delta}_{i_1} \cdot \bar{\delta}_{i_1, i_2} \cdot \bar{\delta}_{i_1, i_2, i_3} \cdots\cdots$$

中惟一的一點。

容易看到，兩個不同的數列

$$i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots \text{ 和 } i'_1, i'_2, i'_3, \cdots\cdots$$

對應於不同的兩點 $z_{i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots}$ 和 $z_{i'_1, i'_2, i'_3, \cdots\cdots}$. 因爲假如 $n$ 是滿足 $i_m \neq i'_m$ 的諸 $m$ 的最小數，那末

$$i_1 = i'_1, \ i_2 = i'_2, \cdots, \ i_{n-1} = i'_{n-1}, \ i_n \neq i'_n,$$

而兩閉區間

$$\overline{\delta}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \text{ 和 } \overline{\delta}_{i_1', i_2', \cdots, i_n'}$$

不會相交,從而

$$z_{i_1, i_2, i_3, \cdots} \neq z_{i_1', i_2', i_3', \cdots}.$$

置

$$S=\{z_{i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots}\},$$

則由第1章§4之定理8,知

$$\overline{\overline{S}}=c.$$

但是 $S\subset P$, 所以

$$\overline{\overline{P}}\geqslant c.$$

另一方面

$$\overline{\overline{P}}\leqslant c.$$

因此 $\overline{\overline{P}}=c$, 定理證畢。

現在我們要將所得的結果用到任意的閉集上去。為此目的我們先導入"凝聚點"的概念。

**定義** 假如每一個包含點 $x_0$ 的區間 $(a, b)$ 一定也包含 $E$ 中不可列的無限個點,則 $x_0$ 稱為 $E$ 的凝聚點。

顯然,點集的凝聚點是它的極限點。

**定理 2** 如果 $E$ 的點都不是 $E$ 的凝聚點,則 $E$ 至多是一可列集。

**證明** 假如兩端 $r$, $R$ 都是有理數的區間 $(r, R)$ 中至多含有 $E$ 的可列個點的話,稱這種區間 $(r, R)$ 是"正規"的。"正規"區間的全體顯然至多是可列的,因為根本只存在可列個的有理數數對 $(r, R)$。

我們將證明, $E$ 中每一點(當然假定 $E$ 不是空集)必定含在某一個"正規"區間中。事實上,設 $x\in E$。因 $x$ 不是 $E$ 的凝聚點,必有區間 $(a, b)$ 含有點 $x$ 而 $E$ 在 $(a, b)$ 中的部分至多成一可列集。現在取如下

的有理數 $r$, $R$:

$$a<r<x<R<b,$$

則 $(r, R)$ 乃是含有 $x$ 的"正規"區間。換言之,對於 $x\in E$,有"正規"區間含有 $x$。

設"正規"區間的全體是

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots\cdots$$

則

$$E=\sum_{k=1}^{\infty} E\delta_k,$$

其中每一個被加集至多是一可列集,所以 $E$ 至多是一可列集。

**系 1** 假如 $E$ 不是可列集,則至少有一個 $E$ 的凝聚點屬於 $E$。

今將此結果與波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理來對照一下: 波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理是對於一切無限集而言,而此結果只對於不可列的集而言。不過在此地,並不需要 $E$ 是有界,其結果不但得到凝聚點之存在,並且知道 $E$ 中必有它的凝聚點。

**系 2** 設 $E$ 是一點集, $P$ 是 $E$ 的凝聚點的全體, 則 $E-P$ 至多是一可列集。

事實上, $E-P$ 沒有 $E$ 的凝聚點, 所以更加沒有 $E-P$ 的凝聚點。

**系 3** 設 $E$ 是一不可列的點集, $P$ 是 $E$ 的所有凝聚點的全體, 那末 $EP$ 是一不可列的集。

事實上, $EP=E-(E-P)$, 故由第 1 章 § 3 之定理 10, 知 $EP$ 是一不可列集。

系 3 實際上包含系 1。

**定理 3** 設集 $E$ 是不可列的集。則 $E$ 的所有凝聚點的全體 $P$ 成

一完全集。

**證明** 先證 $P$ 是閉集。設 $x_0$ 是 $P$ 的任一極限點，任取含有 $x_0$ 的區間 $(a, b)$，其中至少含有 $P$ 的一個點 $z$。$z$ 是 $E$ 的凝聚點，所以 $(a, b)$ 中含有 $E$ 的不可列個的點。就是說，包含 $x_0$ 的任何區間 $(a, b)$ 中含有 $E$ 的不可列個的點，從而 $x_0$ 自己也是 $E$ 的凝聚點，即 $x_0 \in P$。所以 $P$ 是一閉集。

其次證明 $P$ 無孤立點。設 $x_0 \in P$, $(a, b)$ 是包含 $x_0$ 的區間，則 $Q = E(a, b)$ 是不可列的集。由定理 2 之系 3, $Q$ 含有不可列個 $Q$ 的凝聚點。因 $Q \subset E$, 所以 $Q$ 的凝聚點也是 $E$ 的凝聚點，因此 $Q$ 中（也可以說在 $(a, b)$ 中）必含有不可列個 $P$ 的點。所以含有 $x_0$ 的任何區間含有不可列個 $P$ 的點。是必 $x_0 \in P'$。定理證畢。

**定理 4** 每一個不可列的閉集 $F$ 可以寫成

$$F = P + D,$$

其中 $P$ 為完全集，$D$ 至多是一可列集。

**證明** 事實上，假使 $P$ 表示 $F$ 的所有凝聚點，則 $P \subset F$, 而 $D = F - P$ 至多是一可列集。

**系** 不可列的閉集，其勢是 $c$。

## 第二章的習題

1. 若 $f(x)$ 是在閉區間 $[a, b]$ 上所定義的連續函數，則對於任何實數 $c$, 滿足 $f(x) \geqslant c$ 的 $x$ 全體成一閉集。

2. 每一個閉集是可列個開集的通集。

3. 試拓廣隔離性定理於無界閉集。

4. 用十進位小數表示閉區間 $[0, 1]$ 中的數時，其用不着數字 7 的一切數成一完全集。

5. 將點集 $[0, 1]$ 表示為 $c$（連續點集的勢）個無共同點的完全集的和集。

6. 證明 $[0, 1]$ 中無理數的全體不可能表示為可列個閉集的和集。

7. 試在 $[0, 1]$ 上定義一個函數，它在任一有理點爲不連續，但在任一無理點爲連續。

8. 證明在 $[0, 1]$ 上不可能定義一個如下的函數，它在每一個有理點爲連續而在每一個無理點爲不連續。

9. 如果 $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 具有下面的性質：對於任意的 $c$，$Z(f(x)\geqslant c)$ 與 $Z(f(x)\leqslant c)$ 常爲閉集，則 $f(x)$ 是一連續函數。

10. 假如點集 $E$ 被區間集 $\mathfrak{M}$ 所遮蓋，則 $\mathfrak{M}$ 中有可列部分集 $\mathfrak{M}^*$ 即可遮蓋 $E$。

11. 證明任何點集的內點的全體成一開集。

# 第三章　可測集

## §1　有界開集的測度

在實變數函數論中點集的測度概念很是重要。它是線段的長，長方形的面積，以及平行六面體的體積等等這種概念的擴充。本章敘述勒貝格的線性測度，但是僅就線性有界集而言。

由於開集具有極簡單的構造，所以我們從開集說起。

**定義 1**　區間 $(a, b)$ 的測度，就是它的長 $b-a$。記以

$$m(a, b)=b-a,$$

顯然的，$m(a, b)>0$。

**補助定理 1**　如果區間 $\triangle$ 中含有有限個不相重疊的區間 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，則

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \leqslant m\triangle.$$

**證明**　設

$$\triangle=(A, B),\ \delta_k=(a_k, b_k) \qquad (k=1, 2, \cdots, n).$$

我們不妨假設

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n.$$

從而

$$b_k \leqslant a_{k+1} \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1),$$

這是因爲 $\delta_k$ 與 $\delta_{k+1}$ 不相重疊之故。所以

$$Q=(B-b_n)+(a_n-b_{n-1})+\cdots+(a_2-b_1)+(a_1-A)$$

是一正數或是 0 。因此，從

$$m\triangle=\sum_{k=1}^{n}m\delta_k+Q,$$

得着補助定理的證明。

**系**　如果區間△中含有可列個不相重疊的區間 $\delta_k(k=1,2,\cdots)$，則

$$\sum_{k=1}^{\infty}m\delta_k\leqslant m\triangle.$$

[對於正項發散級數若記其和為 $+\infty$，則凡正項級數必有和。正項級數 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 滿足 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k<C$ 時，它是收斂級數]。

**定義 2**　設 $G$ 是不空的有界開集，則其一切構成區間之長的和稱為 $G$ 的測度。即

$$mG=\sum_{k}m\delta_k.$$

[記號 $\sum_{k}m\delta_k$ 表示 $\sum_{k=1}^{n}m\delta_k$ 或 $\sum_{k=1}^{\infty}m\delta_k$，視集 $\{\delta_k\}$ 為有限或可列而定]。

由上面所述的系，知

$$mG<+\infty.$$

如果集 $G$ 是空集，則定

$$mG=0.$$

所以，$G$ 是一開集的話，則 $mG\geqslant0$。

假如△是一包含開集 $G$ 的區間，則

$$mG\leqslant m\triangle.$$

**例**　（康脫的開集 $G_0$）　康脫的開集 $G_0$ 是經過一系列的步驟而得

的。第一步是取一個長爲$\frac{1}{3}$的區間$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$。第二步是加上兩個區間：$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$及$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$，每一區間之長是$\frac{1}{9}$。第三步是添加四個區間，每區間之長是$\frac{1}{27}$。依此類推。

故得

$$mG_0=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=1.$$

**定理 1** 設 $G_1, G_2$ 是兩個有界開集。若 $G_1\subset G_2$，則

$$mG_1\leqslant mG_2.$$

**證明** 設 $\delta_i(i=1, 2, 3, \cdots)$ 及 $\triangle_i(i=1, 2, 3,\cdots)$ 分別是 $G_1$ 及 $G_2$ 的構成區間。

由第二章 § 5 之定理 4，每一個區間 $\delta_i$ 必定含在某一個（且只有一個）區間$\triangle_k$之中。把區間集$\{\delta_i\}$劃分出如下的子集 $A_1, A_2, A_3,\cdots\cdots$：當 $\delta_i\subset\triangle_k$ 時，稱 $\delta_i$ 在 $A_k$ 之中。由二重級數的性質，得

$$mG_1=\sum_i m\delta_i=\sum_k\Big(\sum_{\delta_i\in A_k} m\delta_i\Big).$$

由補助定理 1 之系，

$$\sum_{\delta_i\in A_k} m\delta_i\leqslant m\triangle_k,$$

由是，

$$mG_1\leqslant\sum_k m\triangle_k=mG_2.$$

**系** 有界開集 $G$ 的測度是一切可能包含 $G$ 的有界開集的測度的下確界。

**定理 2** 若有界開集 $G$ 是有限個或可列個不相重疊的開集 $G_k$ 的和集：

$$G=\sum_k G_k \qquad (G_kG_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

則

$$mG=\sum_k mG_k.$$

這個性質稱爲完全可加性，卽開集的測度具有完全可加性。

**證明**　設 $\delta_i^{(k)}(i=1,2,3,\cdots)$ 是 $G_k$ 的構成區間，則每一個 $\delta_i^{(k)}$ 也是 $G$ 的構成區間。實際上，$\delta_i^{(k)}\subset G$。所要證的是 $\delta_i^{(k)}$ 之兩端都不屬於$G$。假如 $\delta_i^{(k)}$ 的右端$\mu$ 屬於 $G$，則 $\mu$ 必屬於某一個 $G_{k'}$（顯然的，$k\neq k'$，因爲 $\mu$ 不屬於 $G_k$）。然而 $G_{k'}$ 是一開集，$\mu$ 必屬於它的一個構成區間之中。設

$$\mu\in\delta_{i'}^{(k')},$$

則 $\delta_i^{(k)}$ 與 $\delta_{i'}^{(k')}$ 有共同點，這是與 $G_k G_{k'}=0$ 相衝突的。同樣，$\delta_i^{(k)}$ 的左端也不屬於 $G$。

由是，一切 $\delta_i^{(k)}$ 都是$G$ 的構成區間。另一方面，$G$ 中任一點必屬於一個 $\delta_i^{(k)}$。這些 $\delta_i^{(k)}$ 兩兩相異。所以集

$$\{\delta_i^{(k)}\}\qquad(i=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots)$$

的確是 $G$ 的構成區間的全部。

因此，從

$$mG=\sum_{i,k}m\,\delta_i^{(k)}=\sum_k\Big(\sum_i m\,\delta_i^{(k)}\Big)=\sum_k mG_k,$$

得着所要的結果。

如果 $G=\sum G_k$ 中諸被加集不是兩兩不相交，那末結果要略加更動。首先證明兩個預備定理:

**補助定理 2**　假如 $[P,Q]$ 被有限個區間所成之集 $H=\{(\lambda,\mu)\}$ 所遮蓋，則

$$Q-P<\sum_H m(\lambda,\mu).$$

證明　我們從 $H$ 依下面的手續選取一個部分集 $H^*$ 首先從$H$取一個包含 $P$ 的區間 $(\lambda_1, \mu_1)$:

$$\lambda_1 < P < \mu_1$$

(這種區間至少存在一個)。如果 $\mu_1 > Q$, 則區間 $(\lambda_1, \mu_1)$ 即為所要的 $H^*$。

如果 $\mu_1 \leqslant Q$, 則因 $\mu_1 \in [P, Q]$, 從 $H$ 中取一個包含 $\mu_1$ 的區間 $(\lambda_2, \mu_2)$:

$$\lambda_2 < \mu_1 < \mu_2.$$

如果 $\mu_2 > Q$, 則 $(\lambda_1, \mu_1)$ 和 $(\lambda_2, \mu_2)$ 組成 $H^*$, 而手續終了。

如果 $\mu_2 \leqslant Q$, 則因 $\mu_2 \in [P, Q]$, 從 $H$ 中取一個包含 $\mu_2$ 的區間 $(\lambda_3, \mu_3)$:

$$\lambda_3 < \mu_2 < \mu_3.$$

如果 $\mu_3 > Q$, 則手續完畢。如果 $\mu_3 \leqslant Q$, 則我們可以再繼續進行同樣的手續。

但$H$是一個有限區間集,而我們進行上述手續時,每次取出的區間必與已經取出的不同,因爲它們的右端適合於

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots\cdots$$

的緣故。所以這種手續不能無限制的進行,最後必有 $\mu_k$ 居 $Q$ 的右方。

設
$$\mu_n > Q,$$
而 $\mu_{n-1} \leqslant Q$, 則我們的手續至第 $n$ 回而告終止。

$n$ 個的區間

$$(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), \cdots\cdots, (\lambda_n, \mu_n)$$

組成 $H^*$。由上述的取法,

$$\lambda_{k+1} < \mu_k \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)>\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)+(\mu_n-\lambda_n)=\mu_n-\lambda_1,$$

又因

$$\mu_n-\lambda_1>Q-P,$$

所以

$$Q-P<\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k),$$

由是

$$Q-P<\sum_{H}(\mu-\lambda).$$

**補助定理 3**　設區間△是有限個或可列個開集 $G_k$ 的和集:

$$\triangle=\sum_{k}G_k,$$

則

$$m\triangle\leqslant\sum_{k}mG_k.$$

**證明**　設 $\triangle=(A,B)$。又設 $G_k$ 的構成區間是 $\delta_i^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$。設 $0<\varepsilon<\dfrac{B-A}{2}$，則△含有 $[A+\varepsilon,\ B-\varepsilon]$。此閉區間 $[A+\varepsilon,\ B-\varepsilon]$ 被區間集 $\delta_i^{(k)}(i=1,\ 2,\cdots;\ k=1,\ 2,\cdots\cdots)$ 所遮蓋。應用第二章 § 2 中的波雷耳定理，存在有限個區間

$$\delta_{i_s}^{(k_s)}\qquad\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

遮蓋 $[A+\varepsilon,\ B-\varepsilon]$ 中一切點。因此，由補助定理 2,

$$B-A-2\varepsilon<\sum_{s=1}^{n}m\delta_{i_s}^{(k_s)}.$$

所以

$$B-A-2\varepsilon<\sum_{i,k}m\delta_i^{(k)}=\sum_{k}\left(\sum_{i}m\delta_i^{(k)}\right)=\sum_{k}mG_k.$$

但 $\varepsilon$ 是一任意的正數，故得

$$B-A\leqslant\sum_k mG_k.$$

**定理 3** 如果有界開集 $G$ 是有限個或可列個開集 $G_k$ 的和集

$$G=\sum_k G_k,$$

則

$$mG\leqslant\sum_k mG_k.$$

**證明** 設 $\triangle_i\,(i=1,2,\cdots)$ 是 $G$ 的構成區間，則

$$mG=\sum_i m\triangle_i.$$

但

$$\triangle_i=\triangle_i\sum_k G_k=\sum_k(\triangle_i G_k),$$

由補助定理 3,

$$m\triangle_i\leqslant\sum_k m(\triangle_i G_k),$$

因此

$$mG\leqslant\sum_i\left[\sum_k m(\triangle_i G_k)\right]=\sum_k\left[\sum_i m(\triangle_i G_k)\right]. \qquad (*)$$

另一方面，

$$G_k=G_k\cdot\sum_i\triangle_i=\sum_i(\triangle_i G_k).$$

由於（注意：這是要點！）上式右方之任何兩項爲不相交，（因爲當 $i\neq i'$ 時 $\triangle_i\triangle_{i'}=0$），所以從定理 2，得着

$$\sum_i m(\triangle_i G_k)=mG_k. \qquad (**)$$

比較 (*) 和 (**) 即得所要的結果。

## § 2　有界閉集的測度

設 $F$ 是一不空的有界閉集，$S$ 是包含 $F$ 的最小閉區間，則 $C_sF$（由第二章 § 3 定理 5）是一有界開集，所以它有一定的測度 $m[C_sF]$。現在我們來定義有界閉集的測度。

**定義 1**　設 $F$ 是一不空的有界閉集，$S=[A, B]$ 是包含 $F$ 的最小閉區間，則定 $F$ 的測度

$$mF=B-A-m[C_sF].$$

對於空的閉集，其測度已經有了意義，因為空集同時也是開集，它的測度我們已定作 0。不空的有界閉集不能同時是一開集，所以不必定義又開又閉的集的測度。

我們考察下面幾個例子。

1.　$F=[a, b]$。此時 $S=[a, b]$，$C_sF=0$。故

$$m[a,b]=b-a,$$

即：閉區間的測度等於其長。

2.　$F$ 為有限個不相交的閉區間的和集

$$F=[a_1, b_1]+[a_2, b_2]+\cdots+[a_n, b_n].$$

假設這些閉區間的次序已經安排好，使得

$$b_k<a_{k+1}\qquad (k=1, 2,\cdots,n-1),$$

則

$$S=[a_1,b_n], C_sF=(b_1, a_2)+(b_2,a_3)+\cdots+(b_{n-1}, a_n).$$

因此，

$$mF=b_n-a_1-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k).$$

這就是說：對有限個不相交的閉區間的和集而言，它的測度等於這些

閉區間的測度的和。

3. 設 $F=P_0$（康脫的完全集），則 $S=[0, 1]$, $C_sF=G_0$。由是，

$$mP_0=1-1=0.$$

所以康脫的完全集 $P_0$ 的測度等於 0。所宜留意的是：$P_0$ 的勢是 $c$。這樣看來，勢為 $c$ 的集，其測度可能等於 0。

**定理 1** 有界閉集 $F$ 的測度決不是負數。

**證明** 利用定義 1, $C_sF\subset(A, B)$。由 § 1 的定理 1,

$$m(C_s F)\leqslant m(A, B)=B-A,$$

故
$$mF\geqslant 0.$$

**補助定理 1** 設 $F$ 是含在區間$\triangle$中的有界閉集，則

$$mF=m\triangle-m[C_\triangle F].$$

**證明** $C_\triangle F$ 是一開集，所以補助定理 1 是有意義的。今設 $\triangle=(A, B)$，又設包含 $F$ 的最小閉區間是 $S=[a, b]$（圖 8）。

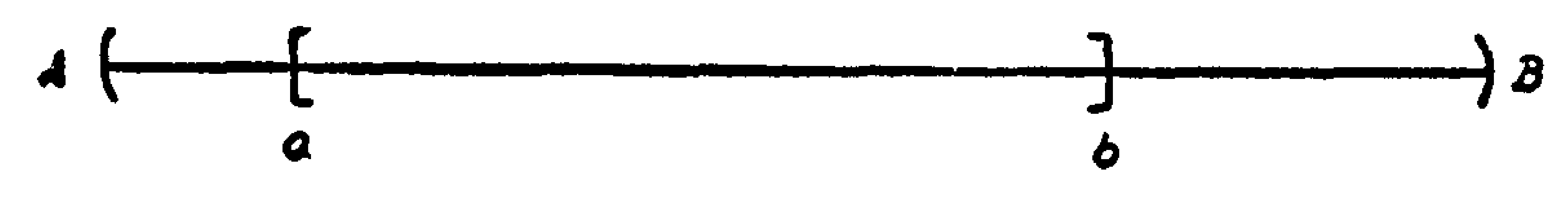


圖 8

易知

$$C_\triangle F=C_\triangle S+C_sF.$$

上式中右邊兩個開集是不相交的。根據（§ 1 定理 2 所說的）測度的可加性，就有

$$m[C_\triangle F]=m[C_\triangle S]+m[C_sF].$$

因 $C_\triangle S=(A, a)+(b, B)$, 故

$$m[C_\triangle S]=(a-A)+(B-b).$$

因此，

$$m[C_\triangle F]=(B-A)-(b-a)+m[C_s F],$$

由此可得所要證的結果。

**定理 2**　設 $F_1, F_2$ 是兩個有界閉集。如果 $F_1 \subset F_2$，則

$$mF_1 \leqslant mF_2.$$

**證明**　設△是包含 $F_2$ 的一個區間，則不難相信

$$C_\triangle F_1 \supset C_\triangle F_2,$$

因此

$$m[C_\triangle F_1] \geqslant m[C_\triangle F_2].$$

再應用上述之補助定理即得。

**系**　有界閉集 $F$ 的測度是 $F$ 所能含有的閉集的測度的上確界。

**定理 3**　設 $F$ 是一閉集，$G$ 是含有 $F$ 的有界開集，則

$$mF \leqslant mG.$$

**證明**　設△是包含 $G$ 的一個區間，則

$$\triangle = G + C_\triangle F,$$

由 § 1 定理 3，得

$$m\triangle \leqslant mG + m[C_\triangle F],$$

再用補助定理 1 即得 $mF \leqslant mG$。

**定理 4**　有界開集 $G$ 的測度是 $G$ 所能含有的閉集的測度的上確界。

**證明**　由定理 3，我們已知 $G$ 所能含有的閉集 $F$，其測度 $mF \leqslant mG$。現在只要證明 $F$ 的測度可以任意接近於 $mG$。

設 $G$ 之構成區間是 $(\lambda_k, \mu_k)$ $(k=1, 2, \cdots\cdots)$，則

$$mG = \sum(\mu_k - \lambda_k).$$

對於任意的正數 $\varepsilon$，取 $n$ 充分大，使下式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}(\mu_k - \lambda_k) > mG - \frac{\varepsilon}{2}.$$

然後對於每一個 $k(k=1, 2, \cdots, n)$，作如下的閉區間 $[\alpha_k, \beta_k]$：

$$[\alpha_k,\beta_k]\subset(\lambda_k,\mu_k),\ m[\alpha_k,\beta_k]>m(\lambda_k,\mu_k)-\frac{\varepsilon}{2n}.$$

(取 $\eta_k$ 適合 $0<\eta_k<\min\left[\frac{\mu_k-\lambda_k}{2},\ \frac{\varepsilon}{4n}\right]$，而置 $\alpha_k=\lambda_k+\eta_k,\beta_k=\mu_k-\eta_k$ 就行)。設

$$F_0=\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k,\beta_k],$$

則 $F_0$ 是含在 $G$ 中的一個閉集，它的測度

$$mF_0=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)>\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)-\frac{\varepsilon}{2}>mG-\varepsilon.$$

因 $\varepsilon$ 是一任意的正數，所以定理證畢。

**定理 5** 有界閉集 $F$ 的測度是包含 $F$ 的有界開集的測度的下確界。

**證明** 如同前定理一樣，只要證明：包含 $F$ 的有界開集的測度可以任意的接近於 $mF$ 好了。

取一個包含 $F$ 的區間 $\triangle$。對於任一正數 $\varepsilon$，由定理 4，有閉集 $\Phi$ 滿足

$$\Phi\subset C_\triangle F,\ m\Phi>m[C_\triangle F]-\varepsilon$$

置

$$G_0=C_\triangle\Phi.$$

則 $G_0$ 是包含 $F$ 的開集，並且

$$mG_0=m\triangle-m\Phi<m\triangle-m[C_\triangle F]+\varepsilon=mF+\varepsilon.$$

因此定理證畢。

**定理 6** 設有界閉集 $F$ 是有限個不相交的閉集的和集：

$$F=\sum_{k=1}^{n}F_k\qquad(F_kF_{k'}=0,\ k\neq k').$$

則

$$mF=\sum_{k=1}^{n}mF_k.$$

**證明**　本定理對 $n=2$ 時來證明就行了。設

$$F=F_1+F_2 \qquad (F_1F_2=0).$$

對於任一正數 $\varepsilon$，根據定理 5，取如下的兩個有界開集 $G_1, G_2$:

$$G_i \supset F_i,\ mG_i < mF_i+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (i=1,2).$$

今置

$$G=G_1+G_2,$$

則 $G$ 是一個包含 $F$ 的有界開集，並且顯然的，

$$mF \leqslant mG \leqslant mG_1+mG_2 < mF_1+mF_2+\varepsilon.$$

由於 $\varepsilon$ 是任意的，故得

$$mF \leqslant mF_1+mF_2. \qquad (*)$$

另一方面，由於隔離性定理，存在着如下的開集 $B_1, B_2$:

$$B_i \supset F_i (i=1,2), \quad B_1B_2=0.$$

又對於任意的正數 $\varepsilon$，可取一個如下的有界開集 $G$:

$$G \supset F, mG < mF+\varepsilon.$$

兩個有界開集 $B_1G$ 和 $B_2G$ 是沒有共同點的，並且分別包含着 $F_1$ 和 $F_2$。因此

$$mF_1+mF_2 \leqslant m(B_1G)+m(B_2G)=m[B_1G+B_2G].$$

(此地我們用到開集的測度的可加性)。因　$B_1G+B_2G \subset G$，故

$$mF_1+mF_2 \leqslant mG < mF+\varepsilon.$$

但 $\varepsilon$ 是任意的，所以

$$mF_1+mF_2 \leqslant mF. \qquad (**)$$

由 (*) 與 (**)，得着

$$mF=mF_1+mF_2.$$

## § 3　有界集的內測度與外測度

**定義 1**　有界集 $E$ 的外測度 $m^*E$ 是所有包含 $E$ 的有界開集的

測度的下確界，即

$$m^*E=\inf_{G\supset E}\{mG\}.$$

那末顯然的，一切有界集 $E$ 都有外測度 $m^*E$:

$$0\leqslant m^*E<+\infty.$$

**定義 2** 有界集 $E$ 的內測度 $m_*E$ 是所有含在 $E$ 中的閉集的測度的上確界，即

$$m_*E=\sup_{F\subset E}\{mF\}.$$

那末顯然的，一切有界集$E$都有內測度:

$$0\leqslant m_*E<+\infty.$$

**定理 1** 假如$G$是一有界開集，則

$$m^*G=m_*G=mG.$$

本定理由 § 1 定理 1 的系及 § 2 定理 4 卽明。

**定理 2** 假如 $F$ 是一有界閉集，則

$$m^*F=m_*F=mF.$$

本定理由 § 2 定理 2 的系及定理 5 卽明。

**定理 3** 對於所有的有界集 $E$,

$$m_*E\leqslant m^*E.$$

**證明** 設$G$是包含$E$的有界開集，$F$是含在$E$中的閉集，則 $F\subset G$。由 § 2 中定理 3，知 $mF\leqslant mG$。因此

$$m_*E\leqslant mG.$$

上式對於一切包含 $E$ 的有界開集 $G$ 都成立，故得

$$m_*E\leqslant m^*E.$$

**定理 4** 假如有界集 $B$ 含有 $A$，則

$$m_*A\leqslant m_*B,\quad m^*A\leqslant m^*B.$$

**證明** 上面兩個不等式的證明相彷。我們只要證明第一式卽行。

設 $S$ 是 $A$ 的所有部分閉集的測度所組成之集，$T$ 是 $B$ 的所有部分閉集的測度所組成之集，則

$$m_*A=\sup S,\quad m_*B=\sup T.$$

設 $F$ 是 $A$ 的任一部分閉集，則 $F$ 同時是 $B$ 的部分閉集，因此

$$S\subset T,$$

從而 $\sup S\leqslant \sup T$，是卽 $m_*A\leqslant m_*B$。

**定理 5**　假如有界集 $E$ 是有限個或可列個集 $E_k$ 的和集

$$E=\sum_k E_k,$$

那末

$$m^*E\leqslant \sum_k m^*E_k.$$

**證明**　假如 $\sum\limits_k m^*E_k$ 是一發散級數，則定理自眞。今設級數 $\sum m^*E_k$ 是收斂的。對於任意的正數 $\varepsilon$，作如下的有界開集 $G_k$：

$$G_k\supset E_k,\ mG_k<m^*E_k+\frac{\varepsilon}{2^k}.\qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

設△是包含 $E$ 的區間，則 $E\subset \triangle\sum\limits_k G_k$。因此由 § 1 定理 3,

$$m^*E\leqslant m\Big[\triangle\sum_k G_k\Big]=m\Big[\sum_k \triangle G_k\Big]\leqslant\sum_k m(\triangle G_k)\leqslant\sum_k mG_k$$
$$<\sum_k m^*E_k+\varepsilon,$$

因 $\varepsilon$ 是任意的正數，故由上式得着所要的結果 $m^*E\leqslant\sum\limits_k m^*E_k$。

**定理 6**　假如有界集 $E$ 是有限個或可列個不相重疊的集 $E_k$ 的和集：

$$E=\sum_k E_k\qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

那末

$$m_*E \geqslant \sum_k m_*E_k.$$

**證明**　首先考察 $n$ 個集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$。對於任意的正數 $\varepsilon$，有如下的閉集 $F_k$:

$$F_k \subset E_k,\ mF_k > m_*E_k - \frac{\varepsilon}{n},\quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

今 $n$ 個集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 之間兩兩不相交，其和集 $\sum_{k=1}^{n} F_k$ 是一閉集。由 § 2 的定理 6，得

$$m_*E \geqslant m\left[\sum_{k=1}^{n} F_k\right] = \sum_{k=1}^{n} mF_k > \sum_{k=1}^{n} m_*E_k - \varepsilon.$$

因爲 $\varepsilon$ 是任意的，所以

$$\sum_{k=1}^{n} m_*E_k \leqslant m_*E.$$

這樣，本定理對於 $E$ 是有限個集的和集時已成立。假如 $E$ 是可列個集的和集時，則因上式對於所有的 $n$ 爲眞，所以 $\sum_k m_*E_k$ 是一收斂級數，並且

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_*E_k \leqslant m_*E.$$

如果將 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 兩兩不相重叠的條件除去，則定理不復成立。例如

$$E_1 = [0, 1],\quad E_2 = [0, 1],\quad E = E_1 + E_2,$$

則 $m_*E = 1$，而 $m_*E_1 + m_*E_2 = 2$。

**定理 7**　設 $E$ 是一有界集，$\triangle$ 是包含 $E$ 的區間，則

$$m^*E + m_*[C_\triangle E] = m\triangle.$$

**證明**　對於任一正數 $\varepsilon$，取閉集 $F$ 使

$$F \subset C_\Delta E,\ mF > m_*[C_\Delta E] - \varepsilon.$$

設 $G = C_\Delta F$，則 $G$ 是包含 $E$ 的有界開集。利用 § 2 的補助定理，得

$$m^*E \leqslant mG = m\triangle - mF < m\triangle - m_*[C_\Delta E] + \varepsilon.$$

因 $\varepsilon$ 是任意的，所以

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] \leqslant m\triangle.$$

下面我們證明與上式相反的不等式：

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] \geqslant m\triangle. \tag{*}$$

取 $\varepsilon > 0$，作有界開集 $G_0$，使

$$G_0 \supset E,\ mG_0 < m^*E + \frac{\varepsilon}{3}.$$

設 $\triangle = (A, B)$，又作含在 $(A, B)$ 中的區間 $(a, b)$ 使滿足

$$A < a < A + \frac{\varepsilon}{3},\ \ B - \frac{\varepsilon}{3} < b < B.$$

置

$$G = \triangle G_0 + (A, a) + (b, B),$$

則 $G$ 是一個包含 $E$ 的有界開集，並且

$$mG < m^*E + \varepsilon.$$

集 $F = C_\Delta G$ 又可寫爲 $F = [a, b] \cdot CG$，它是一個有界閉集，這結果在此地是很重要的。又因 $F \subset C_\Delta E$，所以

$$m_*[C_\Delta E] \geqslant mF = m\triangle - mG > m\triangle - m^*E - \varepsilon.$$

由於 $\varepsilon$ 是任意的，由上式卽得 (*)。定理已證畢。

**系**　設區間 $\triangle$ 含有點集 $E$，則

$$m^*[C_\Delta E] - m_*[C_\Delta E] = m^*E - m_*E.$$

**證明**　將定理用到點集 $C_\Delta E$ 上，則得

$$m^*[C_\Delta E] + m_*E = m\triangle,$$

因此 $$m^*[C_\Delta E]+m_*E=m^*E+m_*[C_\Delta E],$$
由是卽得所要求的結果。

## §4 可測集

**定義** 如果有界集 $E$ 的內測度和外測度相等,則稱 $E$ 是一個可測集。這時 $E$ 的內測度或外測度的數值就定作 $E$ 的測度,記爲 $mE$:

$$mE=m^*E=m_*E.$$

這種測度概念的規定是屬於勒貝格的方法,有時稱這種可測集是"依勒貝格的意義是可測的",或簡稱爲"(L)可測"。

如果 $E$ 不是可測集,則不能言其測度,那時 $mE$ 就沒有意義。特別對每個無界集,我們都認爲是不可測的。(我們在此地不打算將測度的定義拓廣到無界集。)

**定理 1** 有界開集是可測集,且新定義的測度與 §1 中所說的是一致的。

這是 §3 定理 1 的直接結果。又由 §3 定理 2,還可導出下面的定理:

**定理 2** 有界閉集是可測集,且新定義的測度與 §2 中所說的是一致的。

又由 §3 定理 7 之系可得:

**定理 3** 如果 $E$ 是含在區間△中的有界集,則 $E$ 和 $C_\Delta E$ 同時爲可測或同時爲不可測。

比較 §3 的定理 5 與定理 6 又得:

**定理 4** 假如有界集 $E$ 是有限個或可列個兩兩不相交的可測集的和集:

$$E=\sum_k E_k \qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

則 $E$ 是一可測集，且

$$mE=\sum_k mE_k.$$

其證明從下面的一串不等式就可明白：

$$\sum_k mE_k=\sum_k m_*E_k\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant\sum_k m^*E_k=\sum_k mE_k.$$

這結果叫做可測集的完全可加性。

在最後所證的定理中，我們假定被加集是兩兩不相交的。現在我們把這個限制除去，來討論有限個可測集的和集。

**定理 5**　有限個可測集的和集是一可測集。

**證明**　設

$$E=\sum_{k=1}^{n}E_k,$$

其中 $E_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是可測集。

對於任一正數 $\varepsilon$，作如下的閉集 $F_k$ 及有界開集 $G_k$：

$$F_k\subset E_k\subset G_k,\ mG_k-mF_k<\frac{\varepsilon}{n},\ (k=1,2,\cdots,n).$$

置

$$F=\sum_{k=1}^{n}F_k,\quad G=\sum_{k=1}^{n}G_k,$$

則 $F$ 是一閉集而 $G$ 是一有界開集，且

$$F\subset E\subset G,$$

從而得到

$$mF\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant mG. \tag{*}$$

但集 $G-F$ 是一有界開集（因 $G-F=G\cdot CF$），它是可測的。還有集 $F$ 也是可測的。因 $F$ 與 $G-F$ 不相交，所以應用上述定理於

$$G=F+(G-F),$$

卽得 $$mG=mF+m(G-F).$$
從而 $$m(G-F)=mG-mF.$$

同理得着

$$m(G_k-F_k)=mG_k-mF_k. \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

因 $G-F$ 與 $G_k-F_k$ 都是有界開集,所以從

$$G-F\subset\sum_{k=1}^{n}(G_k-F_k)$$

及 §1 中的定理得着

$$m(G-F)\leqslant\sum_{k=1}^{n}m(G_k-F_k).$$

由是

$$mG-mF\leqslant\sum_{k=1}^{n}[mG_k-mF_k]<\varepsilon.$$

由上式及(*),乃得

$$m^*E-m_*E<\varepsilon,$$

因 $\varepsilon$ 是一任意的正數,所以

$$m^*E=m_*E.$$

**定理 6** 有限個可測集的通集是可測的。

**證明** 設

$$E=\prod_{k=1}^{n}E_k,$$

其中 $E_k$ 都是可測集。設區間△包含所有的 $E_k$,那末

$$C_\Delta E=\sum_{k=1}^{n}C_\Delta E_k.$$

兩集 $C_\Delta E_k$ 與 $E_k$ 同時爲可測,故由定理 5,知 $C_\Delta E$ 是一可測集。因此 $E$ 是一可測集。

**定理 7** 兩個可測集的差是一可測集。

**證明** 設

$$E=E_1-E_2,$$

其中 $E_1$ 與 $E_2$ 都是可測集。設區間△包含 $E_1$ 及 $E_2$，則

$$E=E_1\cdot C_{\Delta}E_2.$$

因此由定理 6 得定理 7。

**定理 8**　假設除了定理 7 中諸條件外，再加上條件 $E_1\supset E_2$，則

$$mE=mE_1-mE_2.$$

**證明**　顯然，

$$E_1=E+E_2 \qquad (EE_2=0).$$

故由定理 4，

$$mE_1=mE+mE_2,$$

由是即得所要的結果。

**定理 9**　假如有界集 $E$ 是可列個可測集的和集，則 $E$ 是一可測集。

**證明**　設

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k.$$

置

$$A_1=E_1,\ A_2=E_2-E_1,\cdots,A_k=E_k-(E_1+\cdots+E_{k-1}),\cdots\cdots,$$

則

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}A_k.$$

此式中的 $A_k$ 都是可測集，並且兩兩不相交。故由定理 4，知 $E$ 是一可測集。

本定理假定 $E$ 爲有界，這條件不能去掉。例如 $E_k=[0,\ k]$，其和集 $\sum_{k=1}^{\infty}E_k=[0,+\infty)$ 並非可測。（在定理 5 中，$E$ 是有限個可測集的和集，所以 $E$ 爲有界這一條件是自然滿足的。）

**定理 10**　可列個可測集的通集是可測的。

**證明** 設

$$E=\prod_{k=1}^{\infty}E_k,$$

其中 $E_k$ 都是可測集。因 $E\subset E_1$, 故 $E$ 是一有界集。設區間$\triangle$包含 $E$, 又設

$$A_k=\triangle E_k \qquad (k=1, 2, 3, \quad ),$$

則

$$E=\triangle E=\triangle\prod_{k=1}^{\infty}E_k=\prod_{k=1}^{\infty}(\triangle E_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_k.$$

因爲

$$C_{\triangle}E=\sum_{k=1}^{\infty}C_{\triangle}A_k,$$

由定理 9, 知 $C_{\triangle}E$ 是可測集。又由定理 3, 知 $E$ 是一可測集。

下面兩個定理在函數理論中頗爲重要。

**定理 11** 設 $E_1, E_2, E_3,\cdots$ 都是可測集。如果

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\cdots$$

且 $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$ 爲有界,則

$$mE=\lim_{n\to\infty}[mE_n].$$

**證明** 容易明白,點集 $E$ 可用下式表示:

$$E=E_1+(E_2-E_1)+(E_3-E_2)+(E_4-E_3)+\cdots\cdots,$$

其中任何兩項都不相交。由定理 4 及定理 8,

$$mE=mE_1+\sum_{k=1}^{\infty}m(E_{k+1}-E_k)=mE_1+\sum_{k=1}^{\infty}[mE_{k+1}-mE_k].$$

根據級數和的意義,得

$$mE=\lim_{n\to\infty}\{mE_1+\sum_{k=1}^{n-1}[mE_{k+1}-mE_k]\}=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

定理證畢。

**定理 12** 設 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 都是可測集，$E=\prod_{k=1}^{\infty}E_k$。如果

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots\cdots,$$

則

$$mE=\lim_{n\to\infty}[mE_n].$$

**證明** 任取一包含 $E_1$ 的區間 $\triangle$, 則

$$C_\triangle E_1\subset C_\triangle E_2\subset C_\triangle E_3\subset\cdots\cdots,$$

$$C_\triangle E=\sum_{k=1}^{\infty}C_\triangle E_k.$$

從定理 11，得

$$m(C_\triangle E)=\lim_{n\to\infty}[m(C_\triangle E_n)].$$

此式可以改寫爲:

$$m\triangle-mE=\lim_{n\to\infty}[m\triangle-mE_n].$$

故定理得證。

## § 5 可測性及測度對於運動的不變性

設 $A$ 和 $B$ 是兩個集，集中元素是具有某種性質的東西。如果有如下的一種規則：對於 $A$ 中任一元素 $a$, 在 $B$ 中有一個並且只有一個元素 $b$ 與它對應，那末這個對應是將 $A$ 單値地映照於 $B$ 上。此時 $B$ 中任一元素不一定在 $A$ 中有它的對應元素。映照的概念是函數概念的直接擴充。設 $a\in A$, $a$ 在 $B$ 中的對應元素常記爲 $f(a)$:

$$b=f(a).$$

此時稱 $b$ 爲 $a$ 的像，而稱 $a$ 爲 $b$ 的原像。一個元素 $b$ 可能有幾個原像。

設 $A^*$ 是 $A$ 的一個子集，$B^*$ 是 $A^*$ 中元素的像的全體（意即當 $a\in A^*$ 時 $f(a)\in B^*$；又當 $b\in B^*$ 時，$A^*$ 中至少有一個 $a$ 適合 $f(a)=b$)。此時稱 $B^*$ 爲集 $A^*$ 的像，而寫成

$$B^*=f(A^*).$$

稱 $A^*$ 爲 $B^*$ 的原像。

這是映照的一般概念。下面所講的映照法是一種很重要的特殊形式。

**定義 1** 設 $Z$ 是實數的全體，$\varphi(x)$ 是一個映照法，當 $x\in Z$ 時，得一實數 $\varphi(x)$。如果對於任何兩個實數 $x$ 和 $y$，像點 $\varphi(x)$ 與 $\varphi(y)$ 間的距離常等於原像 $x$ 與 $y$ 間之距離：

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|$$

的話，則稱此映照法爲一運動。

簡單的說：運動是這樣一種映照法，$Z$ 中的點經運動後仍舊是 $Z$ 中的點並且原來任二點間的距離經運動後保持不變。

**定理 1** 設 $\varphi(x)$ 是一運動，那末當 $x\neq y$ 時 $\varphi(x)\neq\varphi(y)$。

事實上，

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|\neq 0.$$

**定理 2** $a$) 若 $A\subset B$，則 $\varphi(A)\subset\varphi(B)$。

$b$) $\varphi(\sum\limits_{\xi}E_{\xi})=\sum\limits_{\xi}\varphi(E_{\xi})$。

$c$) $\varphi(\prod\limits_{\xi}E_{\xi})=\prod\limits_{\xi}\varphi(E_{\xi})$。

$d$) 若 $E_0$ 是空集，則 $\varphi(E_0)=E_0$。

本定理的證明可由讀者自行完成。此地僅指出祇有在證明 $c$)時要

用到定理 1。

下面三種映照法都是運動：

I. $\varphi(x)=x+d$　（移動）

II. $\varphi(x)=-x$　（反射）

III. $\varphi(x)=-x+d$。

實際上，凡是運動除了上面三種而外（嚴格地說來只有兩種，因爲 II 是 III 的特殊情形）沒有別的了。將這個非常重要的事實寫成定理就是：

**定理 3**　假如 $\varphi(x)$ 是運動，那末或是

$$\varphi(x)=x+d,$$

或是

$$\varphi(x)=-x+d.$$

**證明**　設

$$\varphi(0)=d.$$

則對於任何 $x$,

$$|\varphi(x)-d|=|x|,$$

此式可以寫爲

$$\varphi(x)=(-1)^{\sigma(x)}x+d \qquad [\sigma(x)=0,1].$$

函數 $\sigma(x)$ 對於每一個 $x\neq0$ 都有意義。現在要證 $\sigma(x)$ 乃是一個常數。

設 $x$ 與 $y$ 是如下的兩點：$x\neq0,\ y\neq0,\ x\neq y$。

則

$$\varphi(x)-\varphi(y)=(-1)^{\sigma(x)}x-(-1)^{\sigma(y)}y,$$

或

$$\varphi(x)-\varphi(y)=(-1)^{\sigma(x)}[x-(-1)^{\rho}y],$$

其中 $\rho=\sigma(y)-\sigma(x)$ 是下列三數之一:

$$\rho=1,\ 0,-1.$$

由運動之定義,必須

$$|x-(-1)^{\rho}y|=|x-y|.$$

因此,或是

$$x-(-1)^{\rho}y=x-y,$$

或是

$$x-(-1)^{\rho}y=-x+y.$$

第二種情形是不會發生的,因爲從第二式會得到

$$2x=y[1+(-1)^{\rho}],$$

當 $\rho=\pm1$ 時, $x=0$; 當 $\rho=0$ 時, $x=y$,這都是不可能的事。

於是,只留下第一種情形爲可能,卽 $\rho=0$。亦卽 $\sigma(x)=\sigma(y)$。

因此當 $x\neq0$ 時, $\sigma(x)$ 是一常數:

$$\sigma(x)=\sigma \qquad (\sigma=0,1).$$

因此

$$\varphi(x)=(-1)^{\sigma}x+d.$$

上式當 $x=0$ 時仍舊成立。從而定理得證。

**系** 對於運動, $Z$ 的任何一點 $y$ 一定是 $Z$ 中某一點 $x$ 的像,這就是說: $\varphi(Z)=Z$。

事實上,如果 $\varphi(x)=(-1)^{\sigma}x+d$, 則 $y$ 之原像是

$$x=(-1)^{\sigma}(y-d).$$

如果 $\varphi(x)=(-1)^{\sigma}x+d$ 是一個運動,則稱運動

$$\varphi^{-1}(x)=(-1)^{\sigma}(x-d)$$

是它的逆運動。這兩個運動之間有關係

$$\varphi[\varphi^{-1}(x)]=\varphi^{-1}[\varphi(x)]=x.$$

換言之，如果 $x$ 由運動 $\varphi$ 得着像 $y$，則由運動 $\varphi^{-1}$，$y$ 之像是 $x$。非常重要的事實是：對於每一個運動存在着一個逆運動。

**定理 4** 對於運動來說：$a$）區間的像仍是區間，且測度不變；像的區間的兩端的原像乃是原來區間的兩端。

$b$）有界集之像仍爲有界集。

**證明** $a$）設區間 $\triangle=(a, b)$。經過運動 $\varphi(x)=x+d$ 它就變爲區間 $(a+d, b+d)$；而經過運動 $\varphi(x)=-x+d$ 它變爲 $(d-b, d-a)$。在無論那種情形下，

$$m\varphi(\triangle)=b-a=m\triangle.$$

$b$）任取一個有界集 $E$。設 $\triangle$ 是包含 $E$ 的一個區間，則

$$\varphi(E)\subset\varphi(\triangle).$$

因此 $\varphi(E)$ 是有界集。實際上，如 $E$ 中所有的點 $x$ 滿足 $|x|<k$，則 $\varphi(E)$ 中所有的點 $y$ 滿足 $|y|<k+|d|$。

**定理 5** 對於運動來說：$a$）閉集之像仍爲閉集。

$b$）開集之像仍爲開集。

**證明** $a$）設 $\varphi(F)$ 是閉集 $F$ 的像。設 $y_0$ 是 $\varphi(F)$ 之一極限點，又設 $\{y_n\}$ 是如下的一列點：

$$\lim_{n\to\infty} y_n=y_0, \quad y_n\in\varphi(F).$$

設

$$x_0=\varphi^{-1}(y_0), \quad x_n=\varphi^{-1}(y_n),$$

則 $x_n\in F$。因

$$|x_n-x_0|=|y_n-y_0|,$$

故

$$x_n\to x_0.$$

由於 $F$ 是一閉集，必然 $x_0 \in F$。因此，

$$y_0=\varphi(x_0)\in\varphi(F).$$

所以 $\varphi(F)$ 是一閉集。

b) 設 $G$ 是一開集。置

$$F=CG,$$

則 $F$ 是一閉集，且

$$G+F=Z,\quad G\cdot F=0.$$

因此由定理 2 及定理 3 之系，得

$$\varphi(G)+\varphi(F)=Z,\quad \varphi(G)\cdot\varphi(F)=0,$$

是即證明 $\varphi(G)$ 是閉集 $\varphi(F)$ 的餘集，所以 $\varphi(G)$ 是一開集。

**定理 6** 有界開集之測度對於運動是一不變量。

**證明** 設 $G$ 是一有界開集，則 $\varphi(G)$ 也是一有界開集。設 $\delta_k(k=1,2,3,\cdots)$ 是 $G$ 的所有構成區間，則由定理 4，$\varphi(\delta_k)$ 是 $\varphi(G)$ 的構成區間，而且可以知道，$\varphi(G)$ 再沒有其他構成區間。因此

$$m\varphi(G)=\sum_k m\varphi(\delta_k)=\sum_k m\delta_k=mG,$$

此即所要證的結果。

**定理 7** 有界集的內測度和外測度對於運動都是不變量。

**證明** a) 設 $E$ 是一有界集。取任意的 $\varepsilon>0$，作有界開集 $G$ 如下：

$$G\supset E,\quad mG<m^*E+\varepsilon.$$

因有界開集 $\varphi(G)$ 包含集 $\varphi(E)$，故

$$m^*\varphi(E)\leqslant m\varphi(G)=mG<m^*E+\varepsilon.$$

因 $\varepsilon$ 是一任意的正數，故得

$$m^*\varphi(E)\leqslant m^*E.$$

由是，有界集經過運動，它的外測度不會增加的。這同時證明了它也不

會減少的，因爲否則逆運動要引起外測度的增加了。故得

$$m^*\varphi(E)=m^*E.$$

$b$) 設$\triangle$是一個包含 $E$ 的區間，則 $\varphi(\triangle)$ 是一個包含 $\varphi(E)$ 的區間。又記

$$A=C_\triangle E.$$

由關係式

$$E+A=\triangle,\quad E\cdot A=0$$

得到

$$\varphi(E)+\varphi(A)=\varphi(\triangle),\quad \varphi(E)\cdot\varphi(A)=0.$$

由於 $\varphi(E)$ 是 $\varphi(A)$ 關於 $\varphi(\triangle)$ 的餘集，由 § 3 的定理 7 得着

$$m^*\varphi(A)+m_*\varphi(E)=m\varphi(\triangle),$$

再由本定理的已證部分和定理 4，得着

$$m_*\varphi(E)=m\triangle-m^*(C_\triangle E),$$

最後利用 § 3 的定理 7，卽得

$$m_*\varphi(E)=m_*E.$$

**系**　對於運動，可測集變爲可測集，且測度不變。

**定義 2**　假如有運動可使集 $A$ 變到集 $B$，那末說 $A$ 與 $B$ 是可合的兩集。

利用這個定義，上述的結果可以寫成如下的形式：

**定理 8**　可合的兩集有相同的內測度和外測度。與可測集可合的集也是可測集，且兩集的測度相等。

## § 6　可測集類

在前兩節 § 4 及 § 5 中所討論的是關於某一可測集本身的性質。現在要詳談可測集類的性質。

**定理 1** 有界可列集是可測的，其測度等於 0。

**證明** 設有界集 $E$ 由點

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots$$

所組成。設 $E_k$ 是單獨由一個元素 $x_k$ 所成的單元素集，則 $E_k$ 是可測的，其測度是 0。由等式

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$$

和 § 4 的定理 4，卽得本定理的證明。

定理 1 之逆不成立，康脫的完全集 $P_0$ 是其一例。

**定義 1** 假如集 $E$ 是可列個閉集 $F_k$ 的和集：

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}F_k,$$

則稱 $E$ 是一 $F_\sigma$ 型的集。

**定義 2** 假如集 $E$ 是可列個開集 $G_k$ 的通集：

$$E=\prod_{k=1}^{\infty}G_k,$$

則稱 $E$ 是一 $G_\delta$ 型的集。

由 § 4 中的定理 9 和定理 10，得

**定理 2** 具有 $F_\sigma$ 型或是 $G_\delta$ 型的有界集都是可測集。

**證明** 對 $F_\sigma$ 型的有界集來說，每一個被加集都是有界閉集。有界閉集是可測的，故由 § 4 的定理 9，其和集也是可測的。

今設 $E$ 是一 $G_\delta$ 型的有界集。取一個包含 $E$ 的區間 $\triangle$，則

$$E=\prod_{k=1}^{\infty}(\triangle G_k),$$

此地 $\triangle G_k$ 都是可測的，由 § 4 的定理 10，卽知 $G$ 是一可測集。

**定義 3** 如果 $E$ 是從開集和閉集經過有限回或可列回“和”與“通”

的手續所生成的集，則稱 $E$ 是波雷耳集。又稱有界的波雷耳集是 $(B)$ 可測的。

例如 $F_\sigma$ 型或 $G_\delta$ 型的集都是波雷耳集。

由定理 2 卽得下面的定理。

**定理 3**　凡 $(B)$ 可測的集是 $(L)$ 可測的。

本定理之逆不眞。事實上，存在着 $(L)$ 可測的集而不是 $(B)$ 可測的。首先舉這種例的是不幸早死的蘇聯數學家蘇司林（1894—1919）。他發現了一類非常重要的集，所謂 $A$ 集。每一個 $A$ 集（但假定是有界的）是 $(L)$ 可測的。$A$ 集類中包含着所有的波雷耳集，但還包含着其他的集。

然則是否存在有界集而不是 $(L)$ 可測的呢？回答這個問題之前先證下面的定理：

**定理 4**　設 $M$ 是所有可測集所成的集，則 $M$ 的勢等於所有點集所成之集的勢，卽 $\overline{\overline{M}}=2^c$。

**證明**　顯然的是

$$\overline{\overline{M}}\leqslant 2^c.$$

另一方面，我們任取一個測度爲 0，勢爲 $c$ 的可測集 $E$（例如康脫集 $P_0$）。又記 $S$ 爲 $E$ 的一切子集的全體。因爲測度爲 0 的集，其子集的外測度也是 0，所以一切子集都是可測集。因此

$$S\subset M.$$

但是由於 $\overline{\overline{S}}=2^c$，得着　$\overline{\overline{M}}\geqslant 2^c.$　因此證得

$$\overline{\overline{M}}=2^c.$$

定理證畢。

雖然如此，但是卻有下面的定理。

**定理 5**　不可測的有界集是存在的。

實例如下。

**不可測集的例子** 將 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 中所有的點以下法分類，兩點 $x$ 與 $y$, 當 $x-y$ 是有理數時，且限於此時稱 $x$ 與 $y$ 屬於同類。設 $x\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 將 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 中具有形式 $x+r$ ($r$ 表示有理數) 點的全體歸爲一類 $K(x)$。這樣，對於一個 $x$, 有一類 $K(x)$ 與之對應，且 $x\in K(x)$。

其次可證不同 *) 的兩類 $K(x)$ 和 $K(y)$ 是不相交的。因爲如果它們相交，那末必有 $z\in K(x)K(y)$。因而

$$z=x+r_x=y+r_y,$$

其中 $r_x$ 和 $r_y$ 都是有理數，故得

$$y=x+r_x-r_y.$$

現在，假定 $t\in K(y)$, 則由

$$t=y+r=x+(r_x-r_y+r)=x+r',$$

得 $t\in K(x)$, 從而 $K(y)\subset K(x)$。同理可得 $K(x)\subset K(y)$, 因此 $K(x)=K(y)$。此與假定相衝突。

將 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 給以上述的分類以後，在每一類中任意選定一點作爲代表元素，這種點的全體記它做 $A$。下面證明 $A$ 是一不可測的集。

設 $[-1, 1]$ 中的有理點的全體是

$$r_0=0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\cdots.$$

設 $A$ 經運動

$$\varphi_k(x)=x+r_k$$

而得集 $A_k$。若 $x\in A$, 則 $\varphi_k(x)\in A_k$；又若 $x\in A_k$, 則 $x-r_k\in A$。特別是 $A_0=A$。所得的集 $A_k$ 都是可合的，所以（§ 5 的定理 8）

*) 集 $K(x)$ 不同於集 $K(y)$ 時，稱 $K(x)$ 與 $K(y)$ 是不同的兩類。所宜注意的是：當 $x\neq y$ 時可能 $K(x)=K(y)$。

$$m_*A_k=m_*A=\alpha,$$
$$m^*A_k=m^*A=\beta.$$

先證

$$\beta>0. \tag{1}$$

爲此首先注意

$$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\subset\sum_{k=0}^{\infty}A_k. \tag{2}$$

事實上,當$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$時$x$必屬於上述分類中的某一類,設此類的代表元素是$x_0$,則$x-x_0$是一個有理數並且一定含在$[-1,+1]$中,因此

$$x-x_0=r_k,$$

而$x\in A_k$。於是(2)得着證明。

由於(§ 3 的定理 5)

$$1=m^*\left[-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\right]\leqslant m^*\left[\sum_{k=0}^{\infty}A_k\right]\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}m^*A_k,$$

即

$$1\leqslant\beta+\beta+\beta+\cdots\cdots,$$

知(1)是眞的。

另一方面,容易證明

$$\alpha=0. \tag{3}$$

事實上,當$n\neq m$時,

$$A_nA_m=0. \tag{4}$$

何以呢?因爲如果有點$z\in A_nA_m$,則

$$x_n=z-r_n \text{ 和 } x_m=z-r_m$$

(顯然是不同的)都屬於$A$而代表不同的類。此事由

$$x_n-x_m=r_m-r_n$$

是一個有理數而知爲不可能。由是得(4)。

又對於任意的 $k$,

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2},\ +\frac{3}{2}\right]$$

(因爲 $x \in A_k$ 含有 $x = x_0 + r_k$, 其中 $|x_0| \leqslant \frac{1}{2}$, $|r_k| \leqslant 1$)。由是

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2},\ +\frac{3}{2}\right]. \tag{5}$$

由 (5) 及 (4), 又由 § 3 的定理 6, 得

$$3 = m_*\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right] \geqslant m_*\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right] \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k,$$

從而

$$\alpha + \alpha + \alpha + \cdots\cdots \leqslant 3,$$

故得 $\alpha = 0$。這就是 (3)。

將 (1) 和 (3) 合併得着

$$m_* A < m^* A,$$

所以 $A$ 是一不可測的集。

**注意**　如果我們不是從閉區間 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ 出發，而是從任何一個具有正的測度的集 $E$ 出發，施行同樣的手續而給以分類，那末就知道 $E$ 中存在着不可測的子集 $A$。因此，凡具有正測度的集含有不可測的子集。

## § 7　測度問題

從 § 6 的末尾，我們知道不可測集的存在。因此很自然地會發生下面的問題：是否可以將勒貝格測度定義加以改頁呢？爲了回答這個問題，首先我們把要討論的問題說得明白一些。

關於點集的測度問題可以從兩方面來着手討論。

I. **較難的測度問題**　對於任一有界集 $E$，要求給它一個非負的數 $\mu E$ 作爲它的測度，但須滿足下列條件：

1. 如果 $E=[0,1]$，則 $\mu E=1$。

2. 假如 $A$ 與 $B$ 是可合的兩集，則 $\mu A=\mu B$。

3. 假如 $E$ 是有限個或可列個不相重疊的集 $E_k(k=1, 2,\cdots\cdots)$ 的和集，則

$$\mu E=\sum_k \mu E_k \quad \text{（測度的完全可加性）。}$$

此地我們光是就一度空間 $R_1$ 提出上述問題：事實上這個問題可以擴充到 $R_2$，乃至一般的 $n$ 度空間 $R_n$。自然，那時條件 1 中的 $[0, 1]$ 必須改爲正方形 $[0, 1; 0, 1]$，乃至 $n$ 度空間的單位骰形。

但是容易證明下面的定理。

**定理 1**　較難的測度問題甚至對於 $R_1$ 空間，也沒有解法。

**證明**　在 § 6，我們曾經作出了一系列不相重疊而是兩兩可合的不可測集：

$$A_0, A_1, A_2,\cdots\cdots,$$

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\subset\sum_{k=0}^{\infty}A_k\subset\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

如果對於所有的集，較難的測度問題已有了解法，那末從上式，可得

$$\mu\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu A_k\leqslant\mu\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

但是閉區間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 與 $[0, 1]$ 是可合的，並且對於任意的 $k$，必須

$$\mu A_k=\mu A=\sigma;$$

又集 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 是有界的，由第三個條件，

$$1\leqslant\sigma+\sigma+\cdots\cdots<+\infty.$$

此關係不論 $\sigma>0$ 或 $\sigma=0$ 都不能成立。定理證畢。

與此相關聯的是

II. **較易的測度問題**　於 I 所述的三個條件中的條件 3，將被加集的個數改爲有限個，這就是說，將完全可加性改爲有限可加性，則成較易的測度問題。

對這個問題我們說出下面的結果，但是不加以證明[1]。

**定理 2**（巴拿哈） 對於 $R_1$ 和 $R_2$ 兩空間中，較易的測度問題是有解法的，但是解法不是惟一的。

**定理 3**（豪司道夫） 若 $n>2$，則對於空間 $R_n$ 的較易測度問題也無解法。

上面的結果，其差異處在於"兩集可合"的概念，"可合"的概念是與運動有關的。在高度空間，運動羣的情形較爲複雜，從而欲求其不變量，亦更困難。

最後，我們引入幾件事實，藉以看到勒貝格測度的好處。

假設我們對於較易的測度問題，已經有了適當的解答，那末從關係

$$A\subset B$$

得着

$$\mu A\leqslant \mu B \text{（單調法則）},$$

這是由於 $\mu B=\mu A+\mu(B-A)$。因此，若 $E$ 爲單元素集，由於 $[0, 1]$ 中可以取出任意多個集與 $E$ 爲可合，故 $E$ 的測度一定是 0。

由是，有限集的測度等於 0。因此，

$$\mu(a, b)=\mu(a, b]=\mu[a, b)=\mu[a, b].$$

其次，從關係

$$[0, 1]=\left[0, \frac{1}{n}\right]+\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

得着

$$\mu\left[0, \frac{1}{n}\right]=\frac{1}{n}.$$

從此可以導出長度爲有理數的閉區間 $[a, b]$ 的測度是 $b-a$。又由測度的單調法則，對於任何閉區間 $[a, b]$，得着測度

$$\mu[a, b]=b-a.$$

由是，假如開集 $G$ 是由有限個構成區間所組成，那末

$$\mu G=mG,$$

如果 $G$ 由可列個構成區間所組成，則

$$\mu G\geqslant mG.$$

---

[1] 豪司道夫定理的證明詳第十一章。巴拿哈定理的證明需要函數解析的知識，出於本書範圍以外。

對於解決較易的測度問題，最自然的方法是使有界開集的測度等於它的構成區間長的和（由上所述，只須對由無限個區間構成的 $G$，要求 $\mu G \leqslant \sum_{k} \mu\delta_k$）。由巴拿哈定理，具有上述性質的方法是存在的（我們在此地不加證明）。今稱之爲“正規”的方法。由是可證下面的定理。

**定理 4**　以“正規”的方法解決較易的測度問題，對於 $(L)$ 可測集而言，則 $\mu E$ 等於勒貝格測度 $mE$。

**證明**　由“正規”方法的意義，有界開集 $G$ 的測度等於勒貝格測度 $mG$。因此對於所有有界閉集 $F$ 有下面的等式：

$$\mu F = mF.$$

如果有界集 $E$ 含有閉集 $F$ 而含在有界開集 $G$ 之中，則從單調法則

$$mF \leqslant \mu E \leqslant mG$$

得到

$$m_* E \leqslant \mu E \leqslant m^* E.$$

定理證畢。

## §8　維他利的定理

**定義**　設 $E$ 是一點集，$M$ 是閉區間所組成的集(但其中每一個閉區間不退縮爲一點)。對於 $E$ 中任一點 $x$，及任一正數 $\varepsilon$，$M$ 中有如下的閉區間 $d$：

$$x \in d, \ md < \varepsilon,$$

此時稱點集 $E$ 依照維他利的意義被 $M$ 所遮蓋。

這就是說：如果 $E$ 中每一點必含在 $M$ 中任意小的一個閉區間中的話，則 $E$ 依照維他利的意義被 $M$ 所遮蓋。

下面的定理在函數論中常被用到。

**定理 1**（維他利）　如果有界集 $E$ 依照維他利的意義被一閉區間的集 $M$ 所遮蓋，則從 $M$ 可以選出有限個或可列個區間 $\{d_k\}$，使

$$d_k d_i = 0 (k \neq i),\ m^*\left[E - \sum_k d_k\right] = 0.$$

重複的說，此地的 $d_k$ 是兩兩不相交的，且除一測度爲 0 之集而外，$\sum d_k$ 遮蓋 $E$。

下面的證明由於巴拿哈。

**證明** 因爲 $E$ 是一有界集，可以取一個包含 $E$ 的區間 $\triangle$。將 $M$ 中的閉區間不完全含在 $\triangle$ 中的全部除去。記賸下來的閉區間的全體爲 $M_0$（$M_0$ 中的元素取自 $M$ 中的閉區間，但每個閉區間全部含在 $\triangle$ 中）。依照維他利的意義，$M_0$ 也遮蓋 $E$。

於 $M_0$ 中任取一閉區間 $d_1$。如果 $E \subset d_1$，則問題已解決。否則我們可依照下面所述的規則導出一列的閉區間 $\{d_k\}$。設

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \cdots\cdots,\ d_n \tag{1}$$

是已經取好了的兩兩不相交的閉區間。如果

$$E \subset \sum_{k=1}^{n} d_k,$$

則手續完畢而定理得證。如果

$$E - \sum_{k=1}^{n} d_k \neq 0 \tag{2}$$

則置

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} d_k,\ G_n = \triangle - F_n$$

由 (2)，$M_0$ 中必有閉區間含在 $G_n$ 中，這種閉區間的長是有界的（因爲均不大於 $m\triangle$）。設此種區間的長的上確界是 $k_n$，在 $G_n$ 中取一個如下的閉區間 $d_{n+1}$：

$$md_{n+1} > \frac{1}{2}k_n. \tag{3}$$

顯然的，這種閉區間 $d_{n+1}$ 與 (1) 中任一閉區間都不相交。

如果此手續至有限回而止，則定理的證明已畢。否則的話，得到一列兩兩不相交的閉區間

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\cdots\cdots. \tag{4}$$

我們將證明這一列閉區間正合於我們的要求。也就是說：

$$m^*(E-S)=0, \tag{5}$$

於此

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}d_k.$$

爲此目的，對於每一個 $d_k$ 作閉區間 $D_k$, $D_k$ 與 $d_k$ 有相同的中心，但是 $D_k$ 的長是 $d_k$ 的五倍：$mD_k=5\,md_k$.

容易明白

$$\sum_{k=1}^{\infty}mD_k<+\infty, \tag{6}$$

這是由於所有的閉區間 $d_k$ 是兩兩不相交且都含在△中的，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}md_k\leqslant m\triangle, \tag{7}$$

由是得 (6)。

要證明 (5), 只要證明

$$E-S\subset\sum_{k=i}^{\infty}D_k \tag{8}$$

對於任意的 $i$ 成立好了。下面證明 (8) 的成立。

設 $x\in E-S$, 當 $x\in G_i$ 時 (因 $G_i$ 是開集), $M_0$ 中有 $d$ 適合於

$$x\in d\subset G_i$$

關係

$$d\subset G_n \tag{9}$$

不能對於所有的 $n$ 成立。否則上式將引出

$$md \leqslant k_n < 2md_{n+1},$$

另一方面從 (7) 得着 $md_n \to 0$, 兩者不相容。所以有 $n$ 使 (9) 式不能成立，因此有如下的 $F_n$:

$$d \cdot F_n \neq 0. \tag{10}$$

設滿足 (10) 式的最小標數是 $n$, 則因

$$d \cdot F_i = 0,$$

而 $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots\cdots$, 顯然的，

$$n > i.$$

根據 $n$ 的定義，

$$d \cdot F_{n-1} = 0,\ d \cdot F_n \neq 0$$

所以得到下面兩事：第一，

$$d \cdot d_n \neq 0 \tag{11}$$

第二，由 $d \subset G_{n-1}$, 所以

$$md \leqslant k_{n-1} < 2md_n. \tag{12}$$

從 (11) 和 (12), 得着

$$d \subset D_n,$$

因之，

$$d \subset \sum_{k=i}^{\infty} D_k.$$

於是

$$x \in \sum_{k=i}^{\infty} D_k.$$

所以 (8) 式成立，從而定理證畢。

在應用上，將維他利定理略為變動其形式更為方便。

**定理 2**（維他利）　在定理 1 的條件下，對於任一正數 $\varepsilon$, $M$ 中存在着有限個兩兩不相重疊的閉區間 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 適合

$$m^*\left(E-\sum_{k=1}^{n} d_k\right)<\varepsilon.$$

**證明**　如同定理 1 的證明一樣，先取一個包含 $E$ 的區間 $\triangle$。將 $M$ 中的閉區間不完全含在 $\triangle$ 中的全部除去，記賸下來的全體爲 $M_0$。那末依照維他利的意義 $M_0$ 也遮蓋 $E$。應用定理 1 於 $M_0$, 在 $M_0$ 中可以選出一列兩兩不相重疊的閉區間 $\{d_k\}$ 適合

$$m^*\left[E-\sum_{k} d_k\right]=0.$$

如果此地的 $\{d_k\}$ 是一有限集，則定理已得證。假如 $\{d_k\}$ 是一無限集，則由 (7),

$$\sum_{k=1}^{\infty} md_k \leqslant m\triangle,$$

所以可取 $n$ 適當的大，使

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} md_k<\varepsilon.$$

但是

$$E-\sum_{k=1}^{n} d_k \subset\left[E-\sum_{k=1}^{\infty} d_k\right]+\sum_{k=n+1}^{\infty} d_k, \tag{13}$$

由於上式右邊第一項是一個測度等於 0 的集，所以得着

$$m^*\left[E-\sum_{k=1}^{n} d_k\right]<\varepsilon.$$

## 第三章的習題

證明下面的種種結果。

1. 任何完全集必含有一個測度爲 0 的完全子集。

2. 設$A$是一個具有正測度的可測集，則 $A$ 中必有兩點 $x$ 與 $y$，此兩點間的距離是一有理數。

3. 有界集 $E$ 爲可測的必要且充分的條件是：對於任一正數 $\epsilon$，存在着一個閉集 $F\subset E$，使 $m^*(E-F)<\epsilon$（瓦來-布桑的檢驗法）。

4. 對於任一有界集 $E$ 存在着兩集 $A$ 和 $B$，$A$ 是 $F_\sigma$ 型，$B$ 是 $G_\delta$ 型而適合於 $A\subset E\subset B$，

$$mA=m_*E,\quad mB=m^*E.$$

5. 假如 $A$ 與 $B$ 是兩個無共同點的可測集，那末對於任一點集 $E$，

$$m^*[E(A+B)]=m^*(EA)+m^*(EB),\quad m_*[E(A+B)]=m_*(EA)+m_*(EB).$$

6. 有界集 $E$ 爲可測的必要且充分的條件是：對於任一有界集 $A$，

$$m^*A=m^*(AE)+m^*(A\cdot CE).$$

（卡拉太屋獨里的檢驗法）

7. 設$E$爲一集，如果任何區間必含有 $CE'$ 中的點，則$E$稱爲疏朗集。試作一個具有正測度的有界疏朗完全集。

8. 作一個含在 $U=[0,1]$ 中的可測集 $E$，使它對於任一區間 $\triangle\subset U$ 而有

$$m(\triangle E)>0,\quad m(\triangle\cdot CE)>0.$$

9. 設 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\cdots$。若 $E=\sum\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是一有界集，則當 $n\to\infty$時，

$$m^*E_n\to m^*E.$$

10. 凡能解答較易的測度問題的測度理論必使有界可列集的測度爲 0。

# 第四章　可測函數

## § 1 可測函數的定義及其最簡單的性質

如果對於集 $E$ 中每一點 $x$ 有一個數 $f(x)$ 與之對應，那末我們稱 $f(x)$ 是點集 $E$ 上所定義的函數。我們允許函數值可以是無限的，不過它們要有一定的符號，爲此我們引用"非眞正"的數 $+\infty$ 和 $-\infty$。這兩個數與任何有限數 $a$ 之間滿足下面的不等式

$$-\infty<a<+\infty.$$

我們規定它們如下的計算法則：

對於任何的有限實數 $a$,

$$+\infty\pm a=+\infty,\ +\infty+(+\infty)=+\infty,\ +\infty-(-\infty)=+\infty,$$

$$-\infty\pm a=-\infty,\ -\infty+(-\infty)=-\infty,\ -\infty-(+\infty)=-\infty,$$

$$|+\infty|=|-\infty|=+\infty,$$

若 $a>0$，則 $+\infty\cdot a=a(+\infty)=+\infty,\ -\infty\cdot a=a(-\infty)=-\infty,$

若 $a<0$，則 $+\infty\cdot a=a(+\infty)=-\infty,\ -\infty\cdot a=a(-\infty)=+\infty,$

$$0(\pm\infty)=(\pm\infty)0=0,$$

$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty}=0.$$

但是下面的一切記號

$$+\infty-(+\infty),\ -\infty-(-\infty),\ +\infty+(-\infty),\ -\infty+(+\infty),\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0}$$

是沒有意義的。[1]

[1] 記號 $0(\pm\infty)$ 和 $(\pm\infty)\cdot 0$ 也時常被看作是沒有意義的。但是爲了方便起見我們確定它們的意義是 0。

對於在 $E$ 上定義的函數 $f(x)$，我們用記號

$$E(f>a)$$

表示$E$中的點滿足 $f(x)>a$ 的 $x$ 之全體。同樣可以瞭解

$$E(f\geqslant a),\ E(f=a),\ E(f\leqslant a),\ E(a<f\leqslant b)$$

等等記號的意義。如果 $f(x)$ 的定義範圍表示爲其他字母例如 $A$ 或 $B$，那末同樣也可用

$$A(f>a),\ B(f>a)$$

等等記號。

**定義1** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的函數。如果 $E$ 是一可測集並且對於任意的 $a$,$E(f>a)$ 也是可測集，那末稱 $f(x)$ 是一可測函數。

此地可測的意義是指着勒貝格意義的可測，所以這種可測函數也稱爲 $(L)$ 可測函數，或稱函數是 $(L)$ 可測的。

**定理1** 測度爲 0 的集上所定義的函數常爲可測。

這是當然的事。

**定理2** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的可測函數。如果 $A$ 是 $E$ 的可測子集，則把 $f(x)$ 看作僅在 $A$ 上定義的函數時，也是可測的。

事實上，

$$A(f>a)=A\cdot E(f>a).$$

**定理3** 設 $f(x)$ 的定義範圍是可測集 $E$, $E$ 是有限個或可列個可測集 $E_k$ 的和集:

$$E=\sum_k E_k.$$

若 $f(x)$ 在任一 $E_k$ 上是可測，則 $f(x)$ 在$E$上也是可測。

事實上，

$$E(f>a)=\sum_k E_k(f>a).$$

**定義 2**　設二個函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是在集 $E$ 上所定義的。假如

$$mE(f\neq g)=0,$$

則稱 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是對等的，用記號

$$f(x)\sim g(x)$$

表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是對等的。

**定義 3**　設命題 $S$ 對於點集 $E-E_0$ 中所有的點都成立。假如 $E_0$ 的測度是 0，則稱 $S$ 在 $E$ 上幾乎處處成立，或稱 $S$ 在 $E$ 中幾乎所有的點成立。

特別，$E_0$ 可以是空集。

現在可以說，如果在 $E$ 上定義的兩個函數是幾乎處處相等的，那末它們是對等的。

**定理 4**　設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的可測函數，又設 $g(x)\sim f(x)$，則 $g(x)$ 也是可測的。

**證明**　設

$$A=E(f\neq g),\quad B=E-A,$$

則因 $mA=0$，$B$ 是可測集。從而得知 $f(x)$ 在 $B$ 上是可測的。但是在 $B$ 上而言，$f(x)$ 和 $g(x)$ 毫無區別，因此 $g(x)$ 在 $B$ 上也是可測。由於 $g(x)$ 在 $A$ 上爲可測（因 $mA=0$），從而 $g(x)$ 在 $E=A+B$ 上亦爲可測。

**定理 5**　如果對於可測集 $E$ 中所有的點 $f(x)=c$，則 $f(x)$ 是可測的。

事實上，當 $a<c$ 時，$E(f>a)=E$；當 $a\geqslant c$ 時，$E(f>a)=0$。

應該注意的是：此定理中的 $c$ 可以爲 $+\infty$ 或 $-\infty$。

設 $f(x)$ 是在閉區間 $[a,b]$ 上定義的函數，如果 $[a,b]$ 中有如下的有限個分點

$$c_0=a<c_1<c_2<\cdots<c_n=b,$$

使在區間 $(c_k, c_{k+1})$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 中 $f(x)$ 取常數值，則稱 $f(x)$ 是一梯形函數。由定理 5，得着下面的結果。

**系** 梯形函數是可測的。

**定理 6** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的可測函數，則對於任意的 $a$，

$$E(f \geqslant a),\ E(f=a),\ E(f \leqslant a),\ E(f<a)$$

都是可測集。

**證明** 下面的等式是容易證明的：

$$E(f \geqslant a)=\prod_{n=1}^{\infty} E\left(f>a-\frac{1}{n}\right).$$

從而得知 $E(f \geqslant a)$ 的可測性。至於其他諸集的可測性，從諸關係式

$$E(f=a)=E(f \geqslant a)-E(f>a),\ E(f \leqslant a)=E-E(f>a),$$
$$E(f<a)=E-E(f \geqslant a)$$

可以導出。

**注意** 設 $E$ 是一可測集，如果對於所有的 $a$，集

$$E(f \geqslant a),\ E(f \leqslant a),\ E(f<a) \tag{1}$$

中至少有一個常爲可測，則 $f(x)$ 在 $E$ 上是可測的。

事實上，從等式

$$E(f>a)=\sum_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant a+\frac{1}{n}\right)$$

知道：如果對於任意的 $a$，$E(f \geqslant a)$ 是可測的話，則 $f(x)$ 是一可測函數。相似的方法可以討論其餘的情形。因此，可測函數的定義中，集 $E(f>a)$ 可用 (1) 中任一個集來代替它。

**定理 7** 如果 $f(x)$ 是 $E$ 上所定義的可測函數，$k$ 是一個有限數，則 1) $f(x)+k$，2) $kf(x)$，3) $|f(x)|$，4) $f^2(x)$，5) $\frac{1}{f(x)}$ (但 $f(x) \neq 0$) 都是可測函數。

**證明**　1）從

$$E(f+k>a)=E(f>a-k),$$

即得 $f+k$ 的可測性。

2）當 $k=0$ 時由定理 5 知 $kf(x)$ 是可測的。至於對其他的 $k$，可以從下列關係

$$E(kf>a)=\begin{cases}E\left(f>\frac{a}{k}\right) & (k>0),\\ E\left(f<\frac{a}{k}\right) & (k<0),\end{cases}$$

得出 $kf(x)$ 的可測性。

3）從

$$E(|f|>a)=\begin{cases}E & (a<0),\\ E(f>a)+E(f<-a) & (a\geqslant 0),\end{cases}$$

知 $|f(x)|$ 是一可測函數。

4）從

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E & (a<0),\\ E(|f|>\sqrt{a}) & (a\geqslant 0),\end{cases}$$

知 $f^2(x)$ 是一可測函數。

5）因 $f(x)\neq 0$，故

$$E\left(\frac{1}{f}>a\right)=\begin{cases}E(f>0) & (a=0),\\ E(f>0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right) & (a>0),\\ E(f>0)+E(f<0)\cdot E\left(f<\frac{1}{a}\right) & (a<0).\end{cases}$$

因此明白 $\frac{1}{f(x)}$ 的可測性。

**定理 8**　在閉區間 $[A,B]$ 上所定義的連續函數 $f(x)$ 是可測的。

**證明** 首先我們證明

$$F=E(f\leqslant a)$$

是一閉集。設 $x_0$ 爲該集之一極限點，又設 $x_n\in F$, $x_n\to x_0$, 則從 $f(x_n)\leqslant a$ 以及 $f(x)$ 的連續性，卽得 $f(x_0)\leqslant a$。因此 $x_0\in F$。所以 $F$ 是一閉集。

再由

$$E(f>a)=E-E(f\leqslant a),$$

可知 $E(f>a)$ 是一可測集。定理證畢。

可測函數的定義表明，在不可測集上所定義的函數總是不可測的。但容易找到在可測集上定義的函數也有不可測的。

**定義 4** 設 $M$ 是 $E=[A,B]$ 之一子集，

$$\varphi_M(x)=\begin{cases}1 & x\in M\\ 0 & x\in E-M.\end{cases}$$

稱 $\varphi_M(x)$ 是集 $M$ 的特徵函數。

**定理 9** 集 $M$ 與其特徵函數 $\varphi_M(x)$ 或都是可測或都是不可測。

**證明** 假如 $\varphi_M(x)$ 是可測的話，則由

$$M=E(\varphi_M>0)$$

知$M$是一可測集。

其逆，如 $M$ 是可測的話，則由

$$E(\varphi_M>a)=\begin{cases}0 & (a\geqslant 1),\\ M & (0\leqslant a<1),\\ E & (a<0),\end{cases}$$

知 $\varphi_M(x)$ 是一可測函數。

這裏，我們順便得到了一個不連續的可測函數的例子。

## § 2　可測函數的其它性質

**補助定理 1**　設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是 $E$ 上所定義的兩個可測函數，則

$$E(f>g)$$

是一可測集。

事實上，設有理數的全體是

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\cdots\cdots$$

則從下面的等式

$$E(f>g)=\sum_{k=1}^{\infty}E(f>r_k)\cdot E(g<r_k)$$

即得着補助定理的證明。

**定理 1**　設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $E$ 上所定義的兩個有限可測函數，則 1) $f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3) $f(x)\cdot g(x)$, 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (但 $g(x)\neq 0$) 都是可測函數。

**證明**　1) 因爲 $a+g(x)$，對於任意的 $a$，是可測的，所以根據補助定理，$E(f>a+g)$ 是一可測集。於是從

$$E(f-g>a)=E(f>a+g)$$

得着 $f(x)-g(x)$ 的可測性。

2) 從　$f(x)+g(x)=f(x)-[-g(x)]$

知 $f(x)+g(x)$ 是一可測函數。

3) 又從

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}$$

和 § 1 中定理 7，即知 $f(x)\cdot g(x)$ 的可測性。

4) 因 $g(x)\neq 0$，所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

是一可測函數。

這個定理表示，在可測函數族中，加減乘除的運算是允許的。下面的定理表示極限的運算也是允許的。

**定理 2** 設 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 是在 $E$ 上所定義的一列可測函數。如果對於每一點 $x\in E$，存在極限（有限或無限）

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

則 $F(x)$ 是一可測函數。簡言之，收斂可測函數列的極限函數是可測的。

**證明** 對於一定的 $a$，兩集

$$A_m^{(k)}=E\left(f_k>a+\frac{1}{m}\right) \text{ 與 } B_m^{(n)}=\prod_{k=n}^{\infty} A_m^{(k)}$$

都是可測的。因此證明下面的等式

$$E(F>a)=\sum_{n,m} B_m^{(n)}$$

好了。

設 $x_0\in E(F>a)$，則 $F(x_0)>a$。所以有自然數 $m$ 使 $F(x_0)>a+\frac{1}{m}$ 成立。又因 $f_k(x_0)\to F(x_0)$，所以存在着 $n$ 使當 $k\geqslant n$ 時，

$$f_k(x_0)>a+\frac{1}{m}.$$

因此，對於所有的 $k\geqslant n$，$x_0\in A_m^{(k)}$。於是 $x_0\in B_m^{(n)}$。自然是 $x_0\in \sum\limits_{m,n} B_m^{(n)}$。從而得到

$$E(F>a)\subset \sum_{m,n} B_m^{(n)}.$$

留下來的是要證明

$$\sum_{m,n} B_m^{(n)}\subset E(F>a). \qquad (*)$$

設 $x_0 \in \sum\limits_{m,n} B_m^{(n)}$，則 $x_0$ 屬於某一 $B_m^{(n)}$。因此，當 $k \geqslant n$ 時，$x_0 \in A_m^{(k)}$。換言之，當 $k \geqslant n$ 時

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

於上式，令 $k$ 無限增大，乃得

$$F(x_0) \geqslant a + \frac{1}{m},$$

從而 $F(x_0) > a$，卽 $x_0 \in E(F > a)$。因此證得(*)。

此定理可拓廣爲如下的定理。

**定理 3**　設 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots$ 是在 $E$ 上所定義的一列可測函數。如果函數 $F(x)$ 使關係

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x) \tag{$\alpha$}$$

在 $E$ 中幾乎所有的點成立，那末 $F(x)$ 是一可測函數。

**證明**　假設 $A$ 是 $E$ 的子集，在 $A$ 中任何點 $(\alpha)$ 不成立（在這種點 $x$，極限 $\lim f_n(x)$ 可能根本不存在）。由假定，$mA = 0$，故 $F(x)$ 在 $A$ 上是可測的。根據定理 2，$F(x)$ 在 $E - A$ 上是可測的。所以 $F(x)$ 在 $E$ 上是可測的。

## § 3　可測函數列・度量收斂

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $E$ 上所定義的函數，$\sigma$ 是一正數。本節研究的是下面兩種形式的集：

$$E(|f-g| \geqslant \sigma),\ E(|f-g| < \sigma).$$

假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 對於某些 $E$ 中的 $x$ 採取了同號無限，這時 $f(x) - g(x)$ 就沒有意義。爲了方便起見，我們規定這種 $x$ 也歸到 $E(|f-g| \geqslant \sigma)$ 中去。[註：今後我們所討論的函數是幾乎處處是有限

的，而對於 $E(|f-g|\geqslant\sigma)$ 光是考察它的測度。由於 $E(f=\pm\infty)+E(g=\pm\infty)$ 是一個測度爲 0 的集，所以從 $E(|f-g|\geqslant\sigma)$ 除去 $E(f=\pm\infty)+E(g=\pm\infty)$ 並不影響它的測度。]在這個規定之下，那末

$$E=E(|f-g|\geqslant\sigma)+E(|f-g|<\sigma),$$

而式中右方兩個集沒有共同點。

**定理 1**（勒貝格） 設 $f_1(x), f_2(x), f_3(x),\cdots\cdots$ 是在可測集 $E$ 上所定義的幾乎處處爲有限的可測函數列，且對於 $E$ 中幾乎所有的點 $x$, $f_n(x)$ 收斂於 $f(x)$。假如 $f(x)$ 在 $E$ 上幾乎處處是有限，那末對於任何正數 $\sigma$,

$$\lim_{n\to\infty}[mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)]=0.$$

**證明** 首先，由 § 2 的定理 3, 知道 $f(x)$ 是一個在 $E$ 上的可測函數。所以 $mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)$ 是有意義的。

設

$$A=E(|f|=+\infty),\ A_n=E(|f_n|=+\infty),\ B=E(f_n\text{不}\to f)$$

$$Q=A+\sum_{n=1}^{\infty}A_n+B.$$

則

$$mQ=0 \tag{1}$$

設

$$E_k(\sigma)=E(|f_k-f|\geqslant\sigma),\ R_n(\sigma)=\sum_{k=n}^{\infty}E_k(\sigma),$$

$$M=\prod_{n=1}^{\infty}R_n(\sigma).$$

所有上述諸集都是可測集。

因爲

$$R_1(\sigma)\supset R_2(\sigma)\supset R_3(\sigma)\supset\cdots\cdots.$$

故由第三章 § 4 的定理 12，當 $n\to\infty$ 時，

$$mR_n(\sigma)\to mM. \tag{2}$$

現在要證明

$$M\subset Q. \tag{3}$$

事實上，如果 $x_0\overline{\in}Q$，則

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x_0)=f(x_0),$$

且 $f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots\cdots$ 和 $f(x_0)$ 都是有限數。所以必有 $n$：當 $k\geqslant n$ 時，

$$|f_k(x_0)-f(x_0)|<\sigma.$$

換言之，

$$x_0\overline{\in}E_k(\sigma) \qquad (k\geqslant n),$$

因此 $x_0\overline{\in}R_n(\sigma)$。自然，$x_0\overline{\in}M$。從而得着(3)。

由(1)與(3)，得 $mM=0$。再由(2)，得

$$mR_n(\sigma)\to 0. \tag{4}$$

因 $$E_n(\sigma)\subset R_n(\sigma),$$

故定理得證。

**注意**　所證得的結果 (4) 實在比定理中所要證的事實更強。這個結果在下面證明葉果洛夫定理時要用到。

定理 1 引導我們建立下面的定義。

**定義**　設

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots \tag{*}$$

是在可測集 $E$ 上概爲有限[1]的可測函數列，又 $f(x)$ 是在 $E$ 上定義的概爲有限的可測函數。如果對於任一正數 $\sigma$，關係

$$\lim_{n\to\infty}[mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)]=0$$

---

[1] 以後爲簡便起見，幾乎處處是有限簡稱概爲有限；幾乎處處收斂簡稱概收斂。

——譯者註。

成立，則稱函數列(*)度量收斂於 $f(x)$。

這時，按照菲赫秦戈里茲的記號，寫作

$$f_n(x) \Longrightarrow f(x).$$

利用度量收斂的概念，勒貝格定理可以改成如下的形式。

**定理 1*** 概收斂的函數列也一定度量收斂於其極限函數。

但是此定理之逆不真，由下例可明。

例 對於每一個自然數 $k$，在 $[0,1)$ 上定義 $k$ 個函數

$$f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x),\ \cdots\cdots,\ f_k^{(k)}(x).$$

它們是：

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\dfrac{i-1}{k},\ \dfrac{i}{k}\right), \\ 0, & x \overline{\in} \left[\dfrac{i-1}{k},\ \dfrac{i}{k}\right). \end{cases}$$

[特別，$f_1^{(1)}(x) \equiv 1,\ x \in [0,1)$]。將這些函數排成一列

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x),\ \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x),\ \cdots,$$

則函數列 $\varphi_n(x)$ 度量收斂於 0。因爲如果 $\varphi_n(x) = f_i^{(k)}(x)$，則對於任意的不大於 1 的正數 $\sigma$，

$$E(|\varphi_n| \geqslant \sigma) = \left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right),$$

但此集的測度等於 $\dfrac{1}{k}$，當 $n \to \infty$ 時接近於 0。[1]

但是，在 $[0,1)$ 中任意一點 $x_0$，關係式

$$\varphi_n(x_0) \to 0$$

並不成立。因爲當 $x_0 \in [0,1)$ 時，固定 $k$，必有如下的 $i$：

$$x_0 \in \left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right).$$

[1] 當 $\sigma > 1$ 時，$E(|\varphi_n| \geqslant \sigma)$ 是一空集，所述仍眞。

從而 $f_i^{(k)}(x_0)=1$。換言之，當我們沿數列

$$\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \varphi_3(x_0),\cdots\cdots$$

看下去，不論怎麼樣的遠，總有等於 1 的數。所以 $\varphi_n(x_0)\to 0$ 不能成立。

由是，度量收斂的概念，其範圍較概收斂的概念爲廣，較處處收斂的概念更廣。

然則由

$$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$$

所定義的函數是否爲惟一的呢？下面的定理 2 和定理 3 是這個問題的答案。

**定理 2**　假如函數列 $f_n(x)$ 度量收斂於 $f(x)$，那末 $f_n(x)$ 也度量收斂於對等於 $f(x)$ 的任一函數 $g(x)$。

**證明**　對於任何正數 $\sigma$，

$$E(|f_n-g|\geqslant\sigma)\subset E(f\neq g)+E(|f_n-f|\geqslant\sigma).$$

因 $mE(f\neq g)=0$，所以從上式得

$$mE(|f_n-g|\geqslant\sigma)\leqslant mE(|f_n-f|\geqslant\sigma),$$

從而得定理之證。

**定理 3**　假如函數列度量收斂於兩個函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，那末 $f(x)$ 對等於 $g(x)$。

**證明**　當 $\sigma>0$ 時，

$$E(|f-g|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)+E\left(|f_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right),\qquad (*)$$

因爲點不屬於右邊任何一集時必不屬於左邊的集。從關係

$$f_n\Longrightarrow f,\ g_n\Longrightarrow g$$

可知(*)中右邊每集的測度當 $n\to\infty$ 時接近於 0。從而

$$mE(|f-g|\geqslant\sigma)=0.$$

由是，從

$$E(f\neq g)\subset\sum_{n=1}^{\infty}E\left(|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right), \qquad (**)$$

得着 $f\sim g$。定理證畢。

[註：在 (**) 式中的 $\subset$ 不能改爲 $=$。因爲當 $f(x)=g(x)=+\infty$ 時，$x$ 並不屬於左方的集 $E(f\neq g)$，但是 $x$ 可以屬於 $E(|f-g|\geqslant\sigma)$]。

由定理 2 和定理 3，假如將所有對等函數視爲同一函數，那末度量收斂的函數列的極限函數是惟一的。此種規定在用到測度的概念來研究函數性質時常被採用。在積分學中亦有類似的事情。

雖然度量收斂的概念是概收斂的概念的拓廣，但是還有下面的定理。

**定理** 4（黎斯） 若函數列 $\{f_n(x)\}$ 度量收斂於 $f(x)$，則必有子函數列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x),\cdots \qquad (n_1<n_2<n_3<\cdots)$$

概收斂於 $f(x)$。

**證明** 取一列收斂於 0 的正數 $\sigma_n$：

$$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3>\cdots$$

又假設

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3+\cdots \qquad (\eta_k>0)$$

是一正項收斂級數。

現在由下面的步驟來決定 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的標數：

$$n_1<n_2<n_3<\cdots. \qquad (*)$$

先取如下的自然數 $n_1$：

$$mE(|f_{n_1}-f|\geqslant\sigma_1)<\eta_1.$$

（這種 $n_1$ 是存在的，因爲 $mE(|f_n-f|\geqslant\sigma_1)\to0$ 之故）

然後取如下的自然數 $n_2$:

$$mE(|f_{n_2}-f|\geqslant\sigma_2)<\eta_2, \qquad n_2>n_1.$$

一般的說：取 $n_k$ 使它滿足

$$mE(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma_k)<\eta_k, \qquad n_k>n_{k-1}.$$

用這樣的方法得到 (*)。現在證明在點集 $E$ 上，$f_{n_k}(x)$ 概收斂於 $f(x)$：即關係

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x) \qquad (*_*)$$

在 $E$ 中幾乎處處成立。其證如下：

設

$$R_i=\sum_{k=i}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma_k), \quad Q=\prod_{i=1}^{\infty}R_i.$$

由第三章 § 4 的定理 12, 從

$$R_1\supset R_2\supset R_3\supset\cdots\cdots$$

得

$$mR_i\to mQ.$$

另一方面，從不等式

$$mR_i<\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k$$

和 $\sum\eta_i$ 的收斂性，得着 $mR_i\to 0$, 即

$$mQ=0.$$

今證 $(*_*)$ 對於 $x\in E-Q$ 是眞的。因爲設 $x_0\in E-Q$, 則 $x_0\notin R_{i_0}$。故當 $k\geqslant i_0$ 時，

$$x_0\notin E(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma_k).$$

因此，

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\sigma_k \qquad (k\geqslant i_0).$$

因 $\sigma_k \to 0$, 所以

$$f_{n_k}(x_0) \to f(x_0).$$

定理證畢。

上面說過,勒貝格定理是度量收斂概念的基礎。現在利用本定理,建立下面很重要的一個定理。

**定理 5** (葉果洛夫) 設在可測集 $E$ 上有一列概爲有限的可測函數:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots\cdots,$$

這一列函數在 $E$ 上概收斂於概爲有限的可測函數 $f(x)$。

在此假設下,對於任一正數 $\delta$, 存在着如下的可測集 $E_\delta \subset E$:

1) $mE_\delta > mE - \delta$。

2) 在 $E_\delta$ 上, $f_n(x)$ 一致收斂於 $f(x)$。

**證明** 在證明勒貝格定理時已證: 設 $\sigma > 0$,

$$R_n(\sigma) = \sum_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \sigma),$$

則

$$mR_n(\sigma) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

任取收斂正項級數

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots\cdots \qquad (\eta_i > 0)$$

和正數列 $\sigma_n$:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots\cdots, \quad \lim \sigma_i = 0.$$

由 (1), 對於每一個自然數 $i$, 有如下的自然數 $n_i$:

$$mR_{n_i}(\sigma_i) < \eta_i.$$

假如取 $i_0$ 使

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta,$$

$$e=\sum_{i=i_0}^{\infty}R_{n_i}(\sigma_i).$$

那末
$$me<\delta.$$

現在證明

$$E_\delta=E-e$$

就是適合 1), 2) 的一集。因爲 $mE_\delta>mE-\delta$ 是明顯的；所以只要證明 $f_n(x)\to f(x)$ 在 $E_\delta$ 上一致的成立就行了。

對於任一正數 $\varepsilon$，取 $i$，使滿足

$$i\geqslant i_0,\ \sigma_i<\varepsilon,$$

現在要證明，當 $k\geqslant n_i$，對於所有的 $x\ \varepsilon E_\delta$，成立着

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

事實上，$x\overline{\in}E_\delta$ 時 $x\overline{\in}e$。因此，$x\overline{\in}R_{n_i}(\sigma_i)$。

換言之，當 $k\geqslant n_i$ 時，

$$x\overline{\in}E(|f_k-f|\geqslant\sigma_i),$$

這就是說：

$$|f_k(x)-f(x)|<\sigma_i \qquad (k\geqslant n_i).$$

從而

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (k\geqslant n_i),$$

此地的 $n_i$ 只與 $\varepsilon$ 有關而與 $x$ 是無關的，所以在 $E_\delta$ 上，$f_n(x)$ 一致收斂於 $f(x)$。

## §4　可測函數的構造

在研究某種函數時，必然會想到下面的問題：可否將該函數用更簡單的函數來表示，或是來近迫。

例如多項式的因子分解，有理數之化爲既約分數，以及將連續函數用冪級數或三角函數來表示，等等，都是將原來的問題簡化形式的例子。

在本節中，我們要講用連續函數來近迫可測函數的幾個定理，從這些定理可以明白可測函數構造上的基本性質，詳見下面定理 4。

**定理 1**　設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的概爲有限的可測函數，那末對於任意的正數 $\varepsilon$，存在一個如下的有界可測函數 $g(x)$：

$$mE(f\neq g)<\varepsilon.$$

**證明**　置

$$A_k=E(|f|>k),\ Q=E(|f|=+\infty).$$

則由假設，$mQ=0$。但由關係

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\cdots$$

$$Q=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$$

得（第三章 § 4 定理 12）

$$\lim_{k\to\infty}mA_k=mQ=0.$$

所以有 $k_0$ 使

$$mA_{k_0}<\varepsilon.$$

今在 $E$ 上定義如下的函數 $g(x)$：

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in E-A_{k_0},\\ 0 & x\in A_{k_0},\end{cases}$$

函數 $g(x)$ 是可測的，並且是有界的。事實上

$$|g(x)|\leqslant k_0.$$

$$E(f\neq g)=A_{k_0},$$

定理證畢。

這個定理表示：概為有限的可測函數，從它的定義範圍除去一個測度任意小的集，成一有界可測函數。

**定義**　設 $f(x)$ 是在 $E$ 上定義的函數。設 $x_0\in E$, $f(x_0)\neq\pm\infty$。在下面二種情形之下：1) $x_0$ 是 $E$ 的孤立點；2) $x_0\in E'$, 當 $x_n\to x_0$, $x_n\in E$ 時，關係 $f(x_n)\to f(x_0)$ 常成立；稱 $f(x)$ 在點 $x_0$ 是連續的。

如果 $f(x)$ 在 $E$ 上每一點是連續，則稱 $f(x)$ 在 $E$ 上為連續。

**補助定理 1**　設 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是兩兩不相交的 $n$ 個閉集，在它們的和集

$$F=\sum_{k=1}^{n} F_k$$

上定義着函數 $\varphi(x)$。假如 $\varphi(x)$ 在每一 $F_k$ 上取常數值，那末 $\varphi(x)$ 在 $F$ 上是連續的。

**證明**　設 $x_0\in F'$, $x_i\to x_0$, $x_i\in F$。

因 $F$ 是閉集，所以 $x_0\in F$。因此必有 $F_m$ 含有 $x_0$。又因 $F_k$ 之間兩兩不相交，所以如果 $k\neq m$, 則 $x_0\overline{\in} F_k$。又因 $F_k$ 為一閉集，所以 $x_0$ 必非 $F_k$ 的極限點。

由是點列 $\{x_i\}$ 中，頂多只有有限個的點屬於 $F_k(k\neq m)$。因此 $\{x_i\}$ 中的點，它屬於

$$F_1, F_2, \cdots, F_{m-1},\ F_{m+1}, \cdots, F_n$$

中某一個集的，其全體只有有限個。設 $i_0$ 是最後的一個，即當 $i\geqslant i_0$ 時，

$$x_i\in F_m.$$

由假設，$\varphi(x)$ 在每一個 $F_k$ 上取常數，故當 $i>i_0$ 時

$$\varphi(x_i)=\varphi(x_0).$$

補助定理 1 由是證畢。

**補助定理 2**　設 $F$ 是含在 $[a, b]$ 中的閉集。設 $\varphi(x)$ 是在 $F$ 上

所定義的連續函數。那末在$[a,b]$上可以定義如下的函數$\psi(x)$:

1) $\psi(x)$是連續的,

2) $x\in F$時,$\psi(x)=\varphi(x)$,

3) $\max|\psi(x)|=\max|\varphi(x)|$。

**證明** 設$[\alpha,\beta]$是包含$F$的最小閉區間。倘使所要求的函數$\psi(x)$在$[\alpha,\beta]$中已有意義,那末置

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(\alpha), & x\in[a,\alpha)\\ \varphi(\beta), & x\in(\beta,b]\end{cases}$$

以後,就得到所要求的函數$\psi(x)$。

因此,我們不妨假設$[a,b]$就是包含$F$的最小閉區間。

如果$F=[a,b]$,則定理不必證明。若$F\neq[a,b]$,則$[a,b]-F$是有限個或可列個不相重疊的區間之和,其中任一區間的兩端都屬於$F$。$[a,b]-F$的每個構成區間稱爲$F$的餘區間。

今作$\psi(x)$如下:當$x\in F$時,令$\psi(x)=\varphi(x)$,在$F$的每個餘區間上$\psi(x)$是線性的,利用端點的函數值保持它的連續性。於是$\psi(x)$在$[a,b]$上完全定義好了。

現在要證明$\psi(x)$在$[a,b]$上是一連續函數。顯然的,$[a,b]-F$中的點都是連續點。今設$x_0\in F$,可以證明$\psi(x)$在$x_0$是左方連續的(右方連續的證明完全相彷)。

若$x_0$是$F$的某個餘區間的右端,則$\psi(x)$在$x_0$爲左方連續,由$\psi(x)$的定義就可明白。

假設$x_0$不是$F$的餘區間的右端。設

$$x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots$$

是一列收斂於$x_0$的點列。如果

$$x_n\in F \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

那末利用 $\varphi(x)$ 在 $F$ 上的連續性，得

$$\psi(x_n)=\varphi(x_n)\to\varphi(x_0)=\psi(x_0).$$

今不妨就

$$x_n \overline{\in} F \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

時來討論。此時 $x_1$ 一定含在某一個餘區間 $(\lambda_1,\mu_1)$ 之中，並且 $\mu_1<x_0$（因爲 $x_0$ 不是任何餘區間的右端）。今設

$$\lambda_1<x_k<\mu_1(k=1,2,\cdots,n_1),\quad x_{n_1+1}>\mu_1.$$

則 $x_{n_1+1}$ 又必含在另一個餘區間 $(\lambda_2,\mu_2)$ 之中，並且 $\mu_2<x_0$。將此種手續繼續進行，得到一列餘區間列

$$(\lambda_1,\mu_1),\ (\lambda_2,\mu_2),\ (\lambda_3,\mu_3)\cdots\cdots,$$

這是順次的自左而右的區間：$\lambda_1<\mu_1<\lambda_2<\mu_2<\cdots\cdots$. 並且

$$x_k\in(\lambda_i,\mu_i) \qquad (k=n_{i-1}+1,\cdots,n_i).$$

從

$$x_{n_i}<\mu_i<x_0$$

得

$$\mu_i\to x_0.$$

又從

$$\mu_{i-1}\leqslant\lambda_i<x_0$$

得

$$\lambda_i\to x_0.$$

但是 $\lambda_i$ 和 $\mu_i$ 都是 $F$ 的點。由於已經說明的事實，知道

$$\lim\psi(\lambda_i)=\lim\psi(\mu_i)=\psi(x_0).$$

由 $\psi(x)$ 的定義，在 $F$ 的每一個餘區間內是線性的，所以 $\psi(x_k)$ 的數值必介乎 $\psi(\lambda_i)$ 和 $\psi(\mu_i)$ 之間。因此

$$\lim_{n\to\infty}\psi(x_n)=\psi(x_0).$$

於是，$\psi(x)$ 是連續的。

由 $\psi(x)$ 的定義，在集 $F$ 上，$\psi(x)$ 等於 $\varphi(x)$。

最後，根據伏爾斯脫勞司定理，連續函數 $|\psi(x)|$ 在 $[a, b]$ 上某一點一定取到最大值，卽 $\max|\psi(x)|$。這種使 $|\psi(x)|$ 取最大值的點一定屬於 $F$，因爲 $\psi(x)$ 在 $F$ 的餘區間內是線性的。因此，

$$\max|\psi(x)|=\max|\varphi(x)|.$$

補助定理完全證畢。

**定理 2** (波雷耳) 設 $f(x)$ 是在 $E=[a, b]$ 上所定義的概爲有限的可測函數。對於任何二正數 $\sigma$ 與 $\varepsilon$，$[a, b]$ 上有連續函數 $\psi(x)$ 適合

$$mE(|f-\psi|\geqslant\sigma)<\varepsilon.$$

如果同時 $|f(x)|\leqslant K$，那末可以選取上面的 $\psi(x)$ 使它滿足

$$|\psi(x)|\leqslant K.$$

**證明** 先設 $|f(x)|\leqslant K$。

固定 $\sigma$ 與 $\varepsilon$，取自然數 $n$，使

$$\frac{K}{n}<\sigma.$$

置

$$E_i=E\left(\frac{i-1}{n}K\leqslant f<\frac{i}{n}K\right)\quad(i=1-n, 2-n, \cdots, n-1)$$

$$E_n=E\left(\frac{n-1}{n}K\leqslant f\leqslant K\right).$$

上述諸集都是可測的，並且兩兩不相交。因此

$$[a, b]=\sum_{i=1-n}^{n}E_i.$$

對於每一個 $E_i$，作如下的閉集 $F_i\subset E_i$，

$$mF_i>mE_i-\frac{\varepsilon}{2n}.$$

置

$$F=\sum_{i=1-n}^{n} F_i.$$

那末，$[a,b]-F=\sum_i (E_i-F_i)$，因而

$$m[a,b]-mF<\varepsilon.$$

現在在 $F$ 上定義如下的函數 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{i}{n}K,\ x\in F_i \qquad (i=1-n,\cdots,n).$$

由補助定理 1, $\varphi(x)$ 在 $F$ 上是連續的，$|\varphi(x)|\leqslant K$。當 $x\in F$ 時（因 $F_i\subset E_i$），

$$|f(x)-\varphi(x)|<\sigma.$$

應用補助定理 2, 在 $[a,b]$ 上作如下的連續函數 $\psi(x)$: 當 $x\in F$ 時，$\psi(x)=\varphi(x)$，$|\psi(x)|\leqslant K$。

由

$$E(|f-\psi|\geqslant\sigma)\subset[a,b]-F,$$

知 $\psi(x)$ 即爲所要求的函數。定理當 $f(x)$ 爲有界時，證明已畢。

假如 $f(x)$ 不是有界函數，那末利用定理 1, 可以作有界可測函數 $g(x)$ 適合於

$$mE(f\neq g)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

將關於有界函數的結果用到函數 $g(x)$，乃得 $[a,b]$ 上如下的連續函數 $\psi(x)$:

$$mE(|g-\psi|\geqslant\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由

$$E(|f-\psi|\geqslant\sigma)\subset E(f\neq g)+E(|g-\psi|\geqslant\sigma),$$

知 $\psi(x)$ 是一所求的函數。

**系** 對於在 $[a, b]$ 上定義的概爲有限的可測函數 $f(x)$，存在着連續函數列 $\psi_n(x)$ 度量收斂於 $f(x)$。

**證明** 取兩個收斂於 0 的數列：

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots\cdots, \qquad \sigma_n \to 0$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots\cdots, \qquad \varepsilon_n \to 0;$$

對於每一個 $n$ 作連續函數 $\psi_n(x)$ 使

$$mE(|f-\psi_n| \geqslant \sigma_n) < \varepsilon_n.$$

因爲對於任意的 $\sigma>0$，必有 $n_0$：當 $n \geqslant n_0$ 時，$\sigma_n < \sigma$。對於這種 $n$，

$$E(|f-\psi_n| \geqslant \sigma) \subset E(|f-\psi_n| \geqslant \sigma_n).$$

由是

$$\psi_n(x) \Longrightarrow f(x).$$

證明完畢。

對於 $\{\psi_n(x)\}$，應用 § 3 的黎斯定理，存在着概收斂於 $f(x)$ 的連續函數列 $\{\psi_{n_k}(x)\}$。由是，得

**定理 3**（茀力許） 對於在 $[a, b]$ 上定義的概爲有限的可測函數 $f(x)$，存在着概收斂於 $f(x)$ 的連續函數列。

利用這個定理，可以證明下面很重要的定理。

**定理 4**（盧洵） 設 $f(x)$ 是在 $E=[a, b]$ 上所定義的概爲有限的可測函數。對於任一正數 $\delta$，有連續函數 $\varphi(x)$ 適合

$$mE(f \neq \varphi) < \delta.$$

特別，當 $|f(x)| \leqslant K$ 時，則可取上面的 $\varphi(x)$ 使它滿足

$$|\varphi(x)| \leqslant K.$$

**證明** 由茀力許定理，有連續函數列

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x), \cdots\cdots$$

概收斂於 $f(x)$。又由葉果洛夫定理，存在着如下的集 $E_\delta$，

$$mE_\delta > b-a-\frac{\delta}{2},$$

在 $E_\delta$ 中關係

$$\varphi_n(x)\to f(x)$$

一致地成立。

由解析學中之一定理[1]，可知 $f(x)$ 在 $E_\delta$ 上是連續的。（並不是說將 $f(x)$ 看作在 $[a, b]$ 上定義的函數時 $f(x)$ 在 $E_\delta$ 上是連續的，而是說：將 $f(x)$ 看作在 $E_\delta$ 上定義時是一連續函數）。

取 $E_\delta$ 的閉子集 $F$，使

$$mF > mE_\delta-\frac{\delta}{2}.$$

如果將 $f(x)$ 看作僅在 $F$ 上所定義的話，那末 $f(x)$ 是一連續函數。再應用補助定理 2，我們可以在 $[a, b]$ 上找到如下的連續函數 $\varphi(x)$：當 $x\in F$ 時，$\varphi(x)$ 等於 $f(x)$。因此，

$$E(f\neq\varphi)\subset[a, b]-F.$$

因 $mE(f\neq\varphi)<\delta$，所以 $\varphi(x)$ 是所要求的函數。

如果 $|f(x)|\leqslant K$，那末對於 $F$ 中的點 $x$，此不等式當然也成立。所以由補助定理 2，有如下的 $\varphi(x)$，$|\varphi(x)|\leqslant K$。

定理因此完全證畢。

盧洵的定理可以改寫爲：概爲有限的可測函數除了一個測度可任意小的集而外，乃是連續的。有些著者即藉此重要性質來定義可測函數。不難證明這兩種定義是等價的。後者特别指出可測函數與連續函數有密切的關係。

[1] 對於在 $[a, b]$ 上定義的連續函數列，如果一致收斂於 $f(x)$ 的話，則 $f(x)$ 是連續的。普通書上對於此定理的證明雖只說到區間，實際上可以拓廣之於任何集。

## § 5 伐爾斯脫勞司的定理

在上一節中我們講了許多用連續函數來接近可測函數的定理。現在再行深入一步。可先用多項式來近迫連續函數，然後用多項式來近迫一般的可測函數。

爲此目的，首先講述伐爾斯脫勞司的定理。這個定理自身也是很重要的。我們依照褒恩司坦的證法來說明它。

**補助定理 1** 下面是一恆等式:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{1}$$

事實上，於恆等式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

置 $a=x$, $b=1-x$, 即得(1)。

**補助定理 2** 對於所有的實數 $x$, 成立着不等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4} \tag{2}$$

**證明** 將等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n \tag{3}$$

關於 $z$ 微分，再乘以 $z$, 則得

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}. \tag{4}$$

將(4)式關於 $z$ 微分再乘以 $z$, 乃得

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{5}$$

於 (3), (4), (5), 置

$$z = \frac{x}{1-x}$$

後，再乘以$(1-x)^n$，乃得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=1, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx(1-x+nx). \tag{8}$$

以 $n^2x^2$ 乘 (6)，$-2nx$ 乘 (7)，1 乘 (8)，然後邊邊相加，乃得

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx(1-x).$$

因此所要的不等式的證明，歸結到證明

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}.$$ [1]

這是很明顯的事，證明完畢。

**定義 1**　設$f(x)$是在 $[0, 1]$ 上定義的有限函數。稱下面的多項式

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{9}$$

爲關於$f(x)$的褒恩斯坦多項式。

**定理 1**　（褒恩斯坦）　假如 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一連續函數，則當 $n\to\infty$ 時，關係

$$B_n(x)\to f(x) \tag{10}$$

一致地成立。

**證明**　設

$$M=\max|f(x)|.$$

對於正數 $\epsilon$，有正數 $\delta$：當 $|x''-x'|<\delta$ 時，

$$|f(x'')-f(x')|<\epsilon.$$

設 $x\in[0, 1]$，由(1)得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

---

[1] 由 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0$ 卽得 $1\geqslant 4x(1-x)$.

從而

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{11}$$

將下面的整數 $k=0,1,2,\cdots,n$ 分成 $A$ 和 $B$ 兩部分:

$$當\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta\ 時,\quad k\in A,$$

$$當\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta\ 時,\quad k\in B.$$

因此當 $k\in A$ 時,

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\epsilon,$$

由補助定理 1,

$$\sum_{A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\epsilon\sum_{A}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\epsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\epsilon \tag{12}$$

若 $k\in B$, 則

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1,$$

由補助定理 2, 得

$$\sum_{B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\cdot C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{B}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}. \tag{13}$$

總合 (11), (12), (13) 三式,得

$$|B_n(x)-f(x)|<\epsilon+\frac{M}{2n\delta^2},\quad x\in[0,1].$$

取 $n>\frac{M}{2\epsilon\delta^2}$, 則得

$$|B_n(x)-f(x)|<2\epsilon.$$

定理證畢。

**定理 2**（伐爾斯脫勞司）　設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的連續函數。那末對於任意的正數 $\epsilon$，存在着多項式 $P(x)$，使不等式

$$|f(x)-P(x)|<\epsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致地成立。

**證明**　假如 $[a, b]=[0,1]$，則本定理是褒恩斯坦定理的結果。設 $[a, b]\neq[0,1]$，則 $y$ 的函數

$$f[a+y(b-a)]$$

在 $[0, 1]$ 上是連續的。所以有如下的多項式 $Q(y)$：

$$|f[a+y(b-a)]-Q(y)|<\epsilon,\qquad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

若 $x\in[a, b]$，則 $\frac{x-a}{b-a}\in[0,1]$，因此

$$\left|f(x)-Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\epsilon.$$

所以，$P(x)=Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$就是所要的多項式。

由伐爾斯脫勞司定理，波雷耳定理與蕭力許定理都可改進它的形式，（但盧洵定理不行！）例如蕭力許定理可以寫成

**定理 3**（蕭力許）　設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的概為有限的可測函數，那末存在着一列多項式列概收斂於 $f(x)$。

**證明**　設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是概收斂於 $f(x)$ 的連續函數列。又設 $P_n(x)$ 是如下的多項式：

$$|P_n(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},\ a\leqslant x\leqslant b.$$

那末 $\{P_n(x)\}$ 卽為所要的多項式列。因為當 $\varphi_n(x)\to f(x)$ 時，當然 $P_n(x)\to f(x)$。定理證畢。

對於波雷耳定理的改變，讀者可以自行寫出。（且可保持 $|P_n(x)|\leqslant\sup|f(x)|$ 的條件！）

對於具有週期的連續函數，可以利用三角多項式來近迫。此事與定理 2 當然有密切的關係。

**定義 2**　稱函數

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

為 $n$ 次的三角多項式。

當 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 時，$T(x)$ 是一偶函數,可以稱它做餘弦多項式。

補助定理 3 $a$) 函數 $\cos^k x$ 可以表爲餘弦多項式。

$b$) 如果 $T(x)$ 是一三角多項式,則 $T(x)\sin x$ 也是三角多項式。

$c$) 如果 $T(x)$ 是一三角多項式,則 $T(x+a)$ 也是三角多項式。

證明從略。

補助定理 4 設 $f(x)$ 是在 $[0, \pi]$ 上定義的連續函數,則對於任一正數 $\epsilon$，存在着餘弦多項式 $T(x)$，使不等式

$$|f(x)-T(x)|<\epsilon$$

當 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 時成立。

證明 將 $f(\arccos y)$ 看作 $y$ 的函數,則在 $[-1, +1]$ 上是連續的。因此，有多項式 $\sum_{k=0}^{n} a_k y^k$ 使不等式

$$|f(\arccos y)-\sum_{k=0}^{n} a_k y^k|<\epsilon$$

對於所有的 $y\in[-1, +1]$ 成立。

若 $x\in[0, \pi]$，則 $\cos x\in[-1, +1]$。因此，

$$|f(x)-\sum_{k=1}^{n} a_k \cos^k x|<\epsilon.$$

由補助定理 3，$\cos^k x$ 是一餘弦多項式。由是定理得證。

系 假如具有週期 $2\pi$ 的偶函數 $f(x)$ 處處是連續的，那末有三角多項式 $T(x)$ 使不等式

$$|f(x)-T(x)|<\epsilon$$

處處成立。

事實上,在 $[0, \pi]$ 中,有餘弦多項式 $T(x)$ 使上式成立。現在 $f(x)$ 與 $T(x)$ 都是偶函數,因此,上式在 $[-\pi, 0]$ 上也成立。最後,由於 $f(x)-T(x)$ 的週期性,不等式處處成立。

定理 4 (伐爾斯脫勞司) 設 $f(x)$ 是一個週期爲 $2\pi$ 的連續的週期函數,那末對於任一正數 $\epsilon$，必有三角多項式 $T(x)$ 使不等式

$$|f(x)-T(x)|<\epsilon$$

處處成立。

**證明**　由補助定理 4,對於偶函數

$$f(x)+f(-x),\ [f(x)-f(-x)]\sin x$$

有如下的多項式 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$:

$$f(x)+f(-x)=T_1(x)+\alpha_1(x),\ [f(x)-f(-x)]\sin x=T_2(x)+\alpha_2(x),$$

其中

$$|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

對於上面兩個不等式，第一式乘以 $\frac{1}{2}\sin^2 x$，第二式乘以 $\frac{1}{2}\sin x$，然後邊邊相加得着

$$f(x)\sin^2 x=T_3(x)+\beta(x),\ |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $T_3(x)$ 是一個三角多項式。

這樣的結果對於任何一個連續的週期函數是眞的。因此對於函數 $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 也是眞的。今設

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x=T_4(x)+\gamma(x),\quad |\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

於此,將 $x$ 換以 $x+\frac{\pi}{2}$，乃得

$$f(x)\cos^2 x=T_5(x)+\delta(x),\quad |\delta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，

$$f(x)=T_3(x)+T_5(x)+\beta(x)+\delta(x),\ |\beta(x)+\delta(x)|<\varepsilon.$$

由是得着所求的三角多項式 $T_3(x)+T_5(x)$。

此刻我們雖然沒有把定理 4 連繫到可測函數的理論,但是以後將會看到，這個定理是非常重要的。

## 第四章的習題

1. 若 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g_n(x)\Longrightarrow g(x)$，則 $f_n(x)+g_n(x)\Longrightarrow f(x)+g(x)$。
2. 設 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g(x)$ 是概爲有限的可測函數,則 $f_n(x)g(x)\Longrightarrow f(x)g(x)$。
3. 對於在 $E$ 中每一點趨向於 $+\infty$ 的函數列,建立葉果洛夫的定理。
4. 存在以多項式爲項的級數 $p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+\cdots\cdots$ 具有下列的性質：對於在

$[a, b]$ 上所定義的任何一個連續函數 $f(x)$，可以將此級數由項的歸倂（但不變更其順序）使級數 $\sum_{k=1}^{\infty}[p_{n_k+1}(x)+\cdots+p_{n_{k+1}}(x)]$ 在 $[a, b]$ 上一致地收斂於 $f(x)$。

5. 一列概為有限的可測函數列 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots$ 要它度量收斂的必要且充分的條件是：對於任何正數 $\sigma$ 和 $\epsilon$，有如下的 $N$：當 $n>N$，$m>N$ 時，

$$mE(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)<\epsilon.$$

（黎斯）

6. 在波雷耳和萊力許定理中，假設定義的閉區間是 $[-\pi, +\pi]$，那末在所述的結果中可以將三角多項式代替連續函數。

7. 可列個可測函數列的上確界函數是可測函數。

8. 如果對於任意固定的 $n$，當 $k\to\infty$ 時

$$f_k^{(n)}(x)\Longrightarrow f^{(n)}(x),$$

而當 $n\to\infty$ 時是

$$f^{(n)}(x)\longrightarrow f(x),$$

那末在 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 中可以選取函數列度量收斂於 $f(x)$.

9. 在上題的敍述中，如果將所有度量收斂改為普通的收斂，則所述不成眞理。

10. 設 $f(t)$ 是在 $E=[a, b]$ 上所定義的概為有限的可測函數。那末 $[a, b]$ 上有如下的單調減少函數 $g(t)$：關係 $mE(g>x)=mE(f>x)$ 對於任何實數 $x$ 成立。

11. 設 $f(t)$ 是在 $E=[a, b]$ 上所定義的概為有限的可測函數。那末有唯一的數 $h$ 使兩關係

$$mE(f\geqslant h)\geqslant\frac{b-a}{2} \text{ 和 } mE(f\geqslant H)<\frac{b-a}{2}(H>h) \text{ 都成立。}$$

（康脫洛維奇）

# 第五章 有界函數的勒貝格積分

## §1 勒貝格積分的定義

柯西所給的後來由黎曼發揚的老的積分定義可述如下：設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上所定義的有限函數。將 $[a,b]$ 用分點

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

分成若干小區間，在每一個小區間 $[x_k, x_{k+1}]$ 中任取一點 $\xi_k$，作黎曼和

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

當

$$\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)$$

趨近於 0 時，如果 $\sigma$ 接近於一個有限的極限 $I$，而且 $I$ 的數値是和 $[a,b]$ 的分法以及 $\xi_k$ 的取法都無關的話，那末稱此極限 $I$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼積分。用記號

$$\int_a^b f(x)dx$$

表示此積分。有時爲了與其他積分識別起見，對於黎曼積分，寫爲

$$(R)\int_a^b f(x)dx.$$

存在着黎曼積分的函數稱爲依黎曼意義可積的函數或稱爲 $(R)$ 可積函數。$f(x)$ 爲 $(R)$ 可積的必要條件是：$f(x)$ 爲有界函數。

柯西早已證明連續函數是 $(R)$ 可積的。但是也有 $(R)$ 可積的不連

續函數。例如單調不連續函數是$(R)$可積的。

我們也容易找到有界函數而不是 $(R)$ 可積的。例如在$[0, 1]$上定義如下的函數 $\psi(x)$（稱爲迪列克來函數）：

$$\text{當 } x \text{ 是有理數時，} \psi(x)=1,$$

$$\text{當 } x \text{ 是無理數時，} \psi(x)=0.$$

這個函數不是$(R)$可積的，因爲如果取所有的 $\xi_k$ 均爲有理數則 $\sigma=1$，如果取所有的 $\xi_k$ 均爲無理數則 $\sigma=0$。

這樣看來，黎曼積分的適用範圍是相當狹隘的——甚至一個很簡單的函數都不能够積分。茲將其原委詳細分析如下。

事情是這樣的：黎曼和的作成，乃是將$[a,b]$分成 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$ 有限個小區間（今以 $e_0, e_1,\cdots,e_{n-1}$ 記之），在每一個 $e_k$ 中選取一點 $\xi_k$，作乘積 $f(\xi_k)me_k$ 的和：

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)me_k.$$

假如 $\sigma$ 有極限，而此極限與 $\xi_k$ 的取法無關的話，黎曼積分才存在。換一句話說：此時 $e_k$ 中每一點 $x$ 都可以取作 $\xi_k$，而這種點的改變要對於 $\sigma$ 不起顯著的作用。這件事情，只有當 $f(\xi_k)$ 由 $\xi_k$ 的改變所造成的差極微時才有可能。所可注意的，$e_k$ 是很小的閉區間 $[x_k,x_{k+1}]$，所以 $e_k$ 中相異的點是很接近的。

如果函數$f(x)$ 是連續的話，那末當 $x$ 的兩值很相接近時，它們所對應的兩函數值也很相接近。所以當 $\xi_k$ 在 $e_k$ 上變動時，$\sigma$ 的變化甚小。但是對於不連續函數，情况就大不相同。

換言之，$e_k$ 的構成是這樣的：只有當 $f(x)$ 是連續函數時，才可以拿 $f(\xi_k)$ 來代表函數在 $e_k$ 上的數值。

因此，黎曼積分的定義可以看作專門爲連續函數而作的，對於其他

的函數偶或也可適用。不過以後我們將要看到，$(R)$ 可積的函數不能"太不連續"。

爲了要把積分這概念推廣到更多的函數上去，勒貝格提出了另一種積分的方法。這方法不是把 $Ox$ 軸上很靠近的 $x$ 取入同一個 $e_k$，而是把函數值很相近的 $x$ 取入同一個 $e_k$。勒貝格將 $[a,b]$ 中的點給以如下的分法：設 $f(x)$ 的一切函數值介乎 $A$ 與 $B$ 之間。於 $[A,B]$ 中插入分點

$$A=y_0<y_1<\cdots<y_n=B,$$

而令

$$e_k=E(y_k\leqslant f<y_{k+1}).$$

假如 $y_{k+1}-y_k$ 很小，那末顯然的對於同一點集 $e_k$ 中的兩點，所對應的函數值也甚近。它與黎曼手續的不同處，乃是 $e_k$ 中的相異兩點 $x$ 在 $Ox$ 上可以相距很遠。

特別，在 $e_k$ 上取 $y_k$ 當作代表的函數值，那末所對應的和就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot me_k.$$

現在我們把這個問題講得更清楚一些。

假設在可測集 $E$ 上定義着一個可測函數 $f(x)$，並且

$$A<f(x)<B. \tag{1}$$

將 $[A,B]$ 用分點

$$y_0=A<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$$

分成若干小部分，而對於每一個 $[y_k, y_{k+1})$ 定義如下的集：

$$e_k=E(y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}) \qquad (k=0,\ 1,\cdots,n-1).$$

那末容易證明，$e_k$ 具有下列四個性質：

1）集 $e_k$ 是兩兩不相交的。即 $e_ke_{k'}=0$ $(k\neq k')$。

2）每一個 $e_k$ 是可測的。

3）$E=\sum_{k=0}^{n-1} e_k$.

4）$mE=\sum_{k=0}^{n-1} me_k$.

今引入勒貝格的小和 $s$ 與大和 $S$:

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot me_k, \qquad S=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}\, me_k.$$

置

$$\lambda=\max(y_{k+1}-y_k),$$

則

$$0\leqslant S-s\leqslant \lambda mE \tag{2}$$

勒貝格和的基本性質如下:

**補助定理** 對於 $[A,B]$ 的某種分法,其對應的勒貝格和設爲 $s_0$ 與 $S_0$。再加上一個新的分點 $\bar{y}$, 從而得到新的勒貝格和是 $s$ 與 $S$, 那末

$$s_0\leqslant s, \quad S\leqslant S_0.$$

換言之,當分點增加時,小和不減少,大和不增加。

**證明** 設

$$y_i<\bar{y}<y_{i+1}. \tag{3}$$

那末當 $k\neq i$ 時,對於新的分法而言,$[y_k, y_{k+1})$ 和 $e_k$ 並無變動,但是 $[y_i,y_{i+1})$ 却分成

$$[y_i, \bar{y}) \text{ 與 } [\bar{y}, y_{i+1})$$

兩個部分。即將 $e_i$ 分成兩集

$$e_i'=E(y_i\leqslant f<\bar{y}),\ e_i''=E(\bar{y}\leqslant f<y_{i+1}).$$

顯然的是

$$e_i=e_i'+e_i'',\ \ e_i'e_i''=0,$$

且

$$me_i=me_i'+me_i'' \tag{4}$$

因此，將 $s_0$ 中的 $y_i me_i$ 換作 $y_i me_i'+\bar{y} me_i''$，就得到 $s$。由 (3) 與(4)，得

$$s\geqslant s_0.$$

同樣可證 $S\leqslant S_0$。

系 任一小和不大於任一大和。

證明 任意取二個 $[A,B]$ 的分法 I 與 II，I 所對應的小和與大和是 $s_1$ 與 $S_1$，II 所對應的小和與大和是 $s_2$ 與 $S_2$。

將 I 與 II 中一切分點合併起來，組成一個分法 III。設 III所對應的小和與大和是 $s_3$ 與 $S_3$。由補助定理，

$$s_1\leqslant s_3,\ \ S_3\leqslant S_2.$$

由是，從

$$s_3\leqslant S_3$$

得

$$s_1\leqslant S_2.$$

證畢。

設 $S_0$ 是一個大和，則任一小和 $s$ 都滿足

$$s\leqslant S_0.$$

因此，所有勒貝格的小和全體 $\{s\}$ 是一個有上界的集。設 $U$ 爲其上確界：

$$U=\sup\{s\}.$$

那末顯然是

$$U\leqslant S_0.$$

由於 $S_0$ 是可以任意取的。所以上式亦卽表示勒貝格的大和全體 $\{S\}$ 是一個有下界的集。今設 $V$ 爲其下確界；

$$V=\inf\{S\}.$$

那末，

$$s\leqslant U\leqslant V\leqslant S.$$

但是 $S-s\leqslant\lambda mE$, 所以

$$0\leqslant V-U\leqslant\lambda mE,$$

因爲 $\lambda$ 可以任意的小，所以

$$U=V.$$

**定義** 這兩個相同的數 $U$ 和 $V$ 稱爲 $f(x)$ 在集 $E$ 上的勒貝格積分，用記號

$$(L)\int_E f(x)dx$$

表示它。如不致與別的積分混淆，可簡寫爲

$$\int_E f(x)dx.$$

特別當 $E=[a,b]$ 時，慣用着下面的記號：

$$(L)\int_a^b f(x)dx,\qquad \int_a^b f(x)dx.$$

由上所證，凡有界可測函數依照勒貝格的意義是可積的——簡稱爲 $(L)$ 可積。由此可知：$(L)$ 可積的函數範圍比 $(R)$ 可積的範圍要廣得多。特別是，許多與鑑定可積性有關的問題，到此就迎刃而解，不像在 $(R)$ 積分中那樣麻煩。

**定理 1.** 當 $\lambda\to 0$ 時，勒貝格的小和與大和 $s$ 與 $S$ 都接近於 $\int_E f(x)dx$。

事實上，從不等式

$$s \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant S,$$

$$S-s \leqslant \lambda mE$$

卽得定理1。

由此定理，勒貝格積分的值與在其定義中所用到的數$A$和$B$是無關的。爲什麼呢？設

$$A<f(x)<B, \quad A<f(x)<B^*<B.$$

將$[A,B]$分成

$$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B,$$

並且假設$B^*$是分點之一，卽設

$$B^*=y_m.$$

那末由此分法作其對應的集，顯然是

$$e_k=0 \qquad (k \geqslant m).$$

因此得到

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k=\sum_{k=0}^{m-1} y_k me_k=s^*,$$

其中$s^*$乃是由$[A,B^*]$所產生的勒貝格的小和。將分點加密然後取其極限，則由$[A,B]$與$[A,B^*]$所得到的積分值$I$與$I^*$是相等的，所以將$B$變動不會影響積分的值，對$A$來講亦是同樣。這個事實是很重要的，因爲只有這樣才使積分定義擺脫了取$A$與$B$時的偶然性。

## §2 積分的基本性質

本節將要建立有界可測函數的積分的一連串性質。

**定理 1** 假如可測函數 $f(x)$ 在可測集 $E$ 上滿足

$$a \leqslant f(x) \leqslant b,$$

則

$$a \cdot mE \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant b \cdot mE.$$

即通常所稱的積分平均值定理。

**證明** 設 $n$ 是一自然數，置

$$A = a - \frac{1}{n}, \quad B = b + \frac{1}{n},$$

則

$$A < f(x) < B.$$

因此，勒貝格的和可以從 $[A, B]$ 作得。

但是，當

$$A \leqslant y_k \leqslant B$$

時，

$$A \sum_{k=0}^{n-1} me_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \leqslant B \sum_{k=0}^{n-1} me_k.$$

因此，

$$A \cdot mE \leqslant s \leqslant B \cdot mE.$$

由是

$$\left(a - \frac{1}{n}\right)mE \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant \left(b + \frac{1}{n}\right)mE.$$

由於 $n$ 是任意的，故定理成立。

由此定理，導出幾個簡單的系。

**系 1** 如果函數 $f(x)$ 在可測集 $E$ 上取常數值 $c$，則

$$\int_E f(x)dx = c \cdot mE.$$

**系 2**　如果 $f(x)$ 不是負的（不是正的），那末它的積分也不是負數(不是正數)。

**系 3**　如果 $mE=0$, 那末任何有界函數 $f(x)$ 在 $E$ 上的積分等於 0:

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

**定理 2**　設 $f(x)$ 是在可測集 $E$ 上所定義的有界可測函數，而 $E$ 是有限個或可列個兩兩不相交的可測集的和集:

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0, k \neq k'),$$

則

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

這個定理表明積分的完全可加性。

**證明**　先就二個集的和集

$$E = E' + E'' \qquad (E'E'' = 0)$$

時證之。

設在 $E$ 上是

$$A < f(x) < B.$$

將 $[A,B]$ 用點 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 細分，作集

$$e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}), e_k' = E'(y_k \leqslant f < y_{k+1}), e_k'' = E''(y_k \leqslant f < y_{k+1}),$$

那末

$$e_k = e_k' + e_k'' \qquad (e_k' e_k'' = 0),$$

從而

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k' + \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k''.$$

令 $\lambda\to 0$ 乃得

$$\int_E f(x)dx = \int_{E'} f(x)dx + \int_{E''} f(x)dx.$$

這樣，我們已經證明了被加集只有兩個時的情形，用數學歸納法，也容易證明被加集是任何有限個時的情形。剩下來的是當

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

時的證明。此時，

$$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k,$$

所以當 $n\to\infty$ 時，

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} mE_k \to 0. \qquad (*)$$

今記

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} E_k = R_n,$$

那末由於當被加集的個數是有限時定理已證，從而

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx + \int_{R_n} f(x)dx.$$

再由平均值定理，乃有

$$A\cdot mR_n \leqslant \int_{R_n} f(x)dx \leqslant B\cdot mR_n.$$

回顧 (*), $R_n$ 的測度 $mR_n$ 當 $n$ 增大時接近於 0, 因此得到

$$\int_{R_n} f(x)dx \to 0.$$

於是證得

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx,$$

由此定理，導出下列幾個系。

系 1　假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在集 $E$ 上定義的兩個對等的有界可測函數，則

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

事實上，如果

$$A = E(f \neq g),\ B = E(f = g),$$

則 $mA = 0$, 因而

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx = 0.$$

在集 $B$ 上兩個函數是相等的，所以

$$\int_B f(x)dx = \int_B g(x)dx.$$

將上面二式邊邊相加卽得 $\displaystyle\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$

特別，一個對等於 0 的函數，其積分爲 0。

自然，最後一語之逆不眞。例如在[−1,1]上所定義的函數 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0), \\ -1 & (x < 0), \end{cases}$$

則[1]

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=-1+1=0,$$

可是函數 $f(x)$ 並不對等於 0。

但下面的系却是成立的。

**系 2** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上不取負值的有界可測函數。如果 $f(x)$ 在 $E$ 上的積分是 0:

$$\int_E f(x)dx=0 \qquad (f(x)\geqslant 0),$$

則 $f(x)$ 對等於 0。

事實上,由於

$$E(f>0)=\sum_{n=1}^{\infty} E\left(f>\frac{1}{n}\right).$$

如果 $f(x)$ 不對等於 0,那末有如下的 $n_0$:

$$mE\left(f>\frac{1}{n_0}\right)=\sigma>0.$$

置

$$A=E\left(f>\frac{1}{n_0}\right),\ B=E-A,$$

則

$$\int_A f(x)dx\geqslant \frac{1}{n_0}\sigma,\quad \int_B f(x)dx\geqslant 0,$$

---

1) 從 $E$ 中除去一點,積分 $\int_E f(x)dx$ 的值不發生變化,所以函數在 $[a,b)$, $(a,b]$ 或 $(a,b)$ 上的積分,均不妨看作是在 $[a,b]$ 上的積分,一律記作 $\int_a^b f(x)dx$。

從而達到矛盾

$$\int_E f(x)dx \geqslant \frac{1}{n_0}\sigma > 0.$$

**定理 3**　如果 $f(x)$ 和 $F(x)$ 都是可測集 $Q$ 上所定義的有界可測函數，則

$$\int_Q [f(x)+F(x)]dx = \int_Q f(x)dx + \int_Q F(x)dx.$$

**證明**　設

$$a < f(x) < b, \qquad A < F(x) < B.$$

將 $[a, b]$ 和 $[A, B]$ 用下面諸點

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b, \quad A = Y_0 < Y_1 < \cdots < Y_N = B$$

細分。置

$$e_k = Q(y_k \leqslant f < y_{k+1}), \quad E_i = Q(Y_i \leqslant F < Y_{i+1}),$$

$$T_{i,k} = E_i e_k \qquad (i=0,1,\cdots,N-1; k=0,1,\cdots,n-1).$$

則顯然的，

$$Q = \sum_{i,k} T_{i,k},$$

而集 $T_{i,k}$ 之間是兩兩不相交的。因此

$$\int_Q (f+F)dx = \sum_{i,k} \int_{T_{i,k}} (f+F)dx.$$

但是，在集 $T_{i,k}$ 上，

$$y_k + Y_i \leqslant f(x) + F(x) < y_{k+1} + Y_{i+1},$$

用平均值定理，得

$$(y_k + Y_i) mT_{i,k} \leqslant \int_{T_{i,k}} (f+F)dx \leqslant (y_{k+1} + Y_{i+1}) mT_{i,k}.$$

將所有這些不等式邊邊相加，乃得

$$\sum_{i,k}(y_k+Y_i)mT_{i,k}\leqslant\int_Q(f+F)dx\leqslant\sum_{i,k}(y_{k+1}+Y_{i+1})mT_{i,k}. \quad (1)$$

每一個和式

$$\sum_{i,k}y_k mT_{i,k} \quad (2)$$

可以寫成

$$\sum_{k=0}^{n-1}y_k\left(\sum_{i=0}^{N-1}mT_{i,k}\right).$$

但是

$$\sum_{i=0}^{N-1}mT_{i,k}=m\left[\sum_{i=0}^{N-1}T_{i,k}\right]=m\left[\sum_{i=0}^{N-1}E_i e_k\right]$$

$$=m\left[e_k\cdot\sum_{i=0}^{N-1}E_i\right]=m(e_kQ)=me_k,$$

所以和式(2)可以寫做

$$\sum_{k=0}^{n-1}y_k me_k.$$

這是函數 $f(x)$ 的一個勒貝格小和 $s_f$.

同樣的方法可以計算(1)式中其他的和，而得不等式

$$s_f+s_F\leqslant\int_Q(f+F)dx\leqslant S_f+S_F, \quad (3)$$

此處所用的記號是不講自明的。

將 $[a,b]$ 及 $[A,B]$ 中的分點加密，由(3)得着所要的結果。定理證畢。

**定理 4** 設 $f(x)$ 是在可測集 $E$ 上所定義的有界可測函數，$c$ 是一個有限數，則

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx.$$

**證明** 當 $c=0$ 時定理自眞。

今設 $c>0$, $A<f(x)<B$。將 $[A,B]$ 用點 $y_k$ 細分後，照常作起對應的 $e_k$, 則得

$$\int_E cf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{e_k} cf(x)dx.$$

但是在 $e_k$ 上，

$$cy_k \leqslant cf(x) < cy_{k+1}.$$

由平均值定理，

$$cy_k me_k \leqslant \int_{e_k} cf(x)dx \leqslant cy_{k+1} me_k.$$

關於 $k$ 施行加法乃得

$$cs \leqslant \int_E cf(x)dx \leqslant cS,$$

其中 $s$ 與 $S$ 表示函數 $f(x)$ 的勒貝格小和與大和，取其極限卽得所要的結果。

最後，設 $c<0$, 則由

$$0=\int_E [cf(x)+(-c)f(x)]dx = \int_E cf(x)dx + (-c)\int_E f(x)dx$$

得所要的結果。

定理證畢。

**系** 若 $f(x)$ 與 $F(x)$ 是可測集 $E$ 上的有界可測函數，則

$$\int_E [F(x)-f(x)]dx = \int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx.$$

**定理 5** 設 $f(x)$ 與 $F(x)$ 是可測集 $E$ 上的有界可測函數。則當 $f(x)\leqslant F(x)$ 時，

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

事實上，函數 $F(x)-f(x)$ 不取負值，所以

$$\int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx = \int_E (F-f)dx \geqslant 0.$$

**定理 6** 設 $f(x)$ 是可測集 $E$ 上的有界可測函數，則

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx.$$

**證明** 設

$$P=E(f\geqslant 0), \quad N=E(f<0).$$

則

$$\int_E f(x)dx = \int_P f dx + \int_N f dx = \int_P |f| dx - \int_N |f| dx.$$

但是

$$\int_E |f| dx = \int_P |f| dx + \int_N |f| dx.$$

因此，應用初等不等式

$$|a-b| \leqslant a+b \qquad (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$$

後，證明即告完成。

## §3 在積分號下取極限

現在我們考慮下面的問題：設在可測集 $E$ 上有一列的有界可測函

數

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots,$$

它們依照某種意義(處處,幾乎處處,度量的)收斂於一個有界可測函數 $F(x)$。我們要問,關係式

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \tag{1}$$

是否成立?如果(1)式是成立的,就是積分的極限等於"極限函數"的積分,則稱可以在積分號下取極限。

一般的說,積分與取極限是不可以交換的。例如在閉區間[0, 1]上定義函數列

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \\ 0, & x \overline{\in} \left(0, \dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

那末

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

就是說,極限函數的積分等於 0。但是

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1,$$

於此積分的極限並不趨近於 0。

因此,自然會發生下面的問題,要在 $f_n(x)$ 上加什麼條件才能使(1)式成立?對於這個問題,此地僅建立如下的定理。

**定理**(勒貝格) 設在可測集 $E$ 上,有一列的有界可測函數 $f_1(x)$, $f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots$ 度量收斂於有界可測函數 $F(x)$:

$$f_n(x) \Longrightarrow F(x).$$

如果存在着常數 $K$，對於所有的 $n$ 與所有的 $x$，使

$$|f_n(x)|\leqslant K$$

成立，則

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E F(x)dx.$$

**證明** 首先注意到，對於幾乎所有的 $x\in E$，關係

$$|F(x)|\leqslant K \tag{2}$$

成立。爲什麼呢？根據黎斯定理從函數列 $\{f_n(x)\}$ 可以選出概收斂於 $F(x)$ 的子函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$。即

$$f_{n_k}(x)\to F(x)$$

幾乎處處成立。從 $|f_{n_k}(x)|\leqslant K$，乃得 (2)。

今設 $\sigma$ 是一個正數。置

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-F|\geqslant\sigma),\quad B_n(\sigma)=E(|f_n-F|<\sigma).$$

則

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\leqslant\int_E|f_n-F|dx=\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-F|dx.$$

因 $|f_n(x)-F(x)|\leqslant|f_n(x)|+|F(x)|$，所以

$$|f_n(x)-F(x)|\leqslant 2K$$

在 $A_n(\sigma)$ 上幾乎處處成立。用平均值定理，乃得

$$\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx\leqslant 2K\cdot mA_n(\sigma). \tag{3}$$

(不等式 $|f_n-F|\leqslant 2K$ 可能在一個測度爲零的集上不成立，但是這件事實並不重要。例如，在該集上將函數 $|f_n(x)-F(x)|$ 以 0 代之，那末不等式 (3) 對於 $A$ 中所有點都成立了。但是因爲函數在一個測度爲零的集上的改變並不影響於積分的值，所以(3)式當沒有這個改變時也

是成立的。)

另一方面，用平均值定理，則有

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx \leqslant \sigma \cdot mB_n(\sigma) \leqslant \sigma \cdot mE.$$

將此式與(3)式合併，則得

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E F dx \right| \leqslant 2KmA_n(\sigma) + \sigma \cdot mE. \qquad (4)$$

於此，對於任意的正數 $\varepsilon$，取適當小的 $\sigma$ 使

$$\sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 $\sigma$，再根據度量收斂的意義，當 $n \to \infty$ 時，

$$mA_n(\sigma) \to 0.$$

所以有如下的 $N$：當 $n > N$ 時，

$$2K \cdot mA_n(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

於是對於這種 $n$，(4) 式變爲

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E F dx \right| < \varepsilon,$$

因此，定理得着證明。

容易明白，若將定理中的假定略略減輕：設不等式

$$|f_n(x)| \leqslant K$$

只是在 $E$ 上幾乎處處成立，則照樣可以證明定理仍舊是成立的。

其次，由於度量收斂的概念廣於通常的收斂，所以將條件 $f_n(x) \Longrightarrow F(x)$ 改爲

$$f_n(x) \to F(x)$$

幾乎處處成立時,定理亦眞(處處成立時更不必說了)。

## § 4 黎曼積分與勒貝格積分的比較

設在 $[a,b]$ 上定義着(不一定是有限的)函數 $f(x)$。設 $x_0\in[a,b]$而 $\delta>0$。函數 $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的下確界與上確界各各記以 $m_\delta(x_0)$ 與 $M_\delta(x_0)$, 即

$$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x)\},\ M_\delta(x_0)=\text{suf}\{f(x)\}\ (x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

(在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中,自然只考慮也含在$[a,b]$ 中的點)

顯然的是

$$m_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M_\delta(x_0).$$

當 $\delta$ 變小時,$m_\delta(x_0)$ 決不減少而 $M_\delta(x_0)$ 決不增加。因此有如下的極限:

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to+0} m_\delta(x_0),\quad M(x_0)=\lim_{\delta\to+0} M_\delta(x_0).$$

並且

$$m_\delta(x_0)\leqslant m(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant M_\delta(x_0).$$

**定義** 函數 $m(x)$ 與 $M(x)$ 分別稱爲 $f(x)$ 的貝爾的下函數與貝爾的上函數。

**定理 1** 設 $f(x)$ 在 $x_0$ 是有限的。函數 $f(x)$ 在 $x_0$ 爲連續的必要且充分的條件是

$$m(x_0)=M(x_0).\tag{*}$$

**證明** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 爲連續,那末對於任意的正數 $\varepsilon$, 存在着如下的 $\delta$: 當 $|x-x_0|<\delta$ 時,

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

換言之,對於 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中所有的點 $x$,

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

成立。因此，

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

令 $\delta\to0$, 得

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

又令 $\varepsilon\to0$, 乃得(*)。所以條件(*)對於連續性是必要的。

現在要證當條件(*)成立時，$x_0$ 是一連續點。事實上，從(*)得

$$m(x_0)=M(x_0)=f(x_0),$$

所以$f(x)$ 的貝爾函數在 $x_0$ 取有限値。

對於任意的正數 $\varepsilon$, 取 $\delta$ 使

$$m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\leqslant m(x_0),\quad M(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)<M(x_0)+\varepsilon$$

都成立。從這些不等式得

$$f(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0),\quad M_\delta(x_0)<f(x_0)+\varepsilon.$$

如果 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 則 $f(x)$ 介乎 $m_\delta(x_0)$ 與 $M_\delta(x_0)$ 之間。因此，

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

換言之，當 $|x-x_0|<\delta$ 時，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

此卽表示 $f(x)$ 在 $x_0$ 爲連續。

**基本補助定理**　設有$[a,b]$的一系列的插入分點法：

$$a=x_0^{(1)}<x_1^{(1)}<\cdots\cdots<x_{n_1}^{(1)}=b$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\cdots\cdots<x_{n_i}^{(i)}=b$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

當 $i\to\infty$ 時，

$$\lambda_i=\max_k [x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)}]\to 0.$$

設 $m_k^{(i)}$ 是函數 $f(x)$ 在 $[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}]$ 中的下確界。作函數 $\varphi_i(x)$ 如下:

$$\varphi_i(x)=m_k^{(i)} \qquad (x\in(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)})),$$

$$\varphi_i(x)=0 \qquad (x=x_0^{(i)},\ x_1^{(i)},\cdots,\ x_{n_i}^{(i)}).$$

假如 $x_0$ 不等於 $x_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3, \cdots; k=0, 1, 2, \cdots, n_i)$,那末

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0).$$

**證明** 固定 $i$, 在上述的第 $i$ 個分法中,設包含 $x_0$ 的小閉區間爲 $[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}]$。由於 $x_0$ 不是一個分點,所以

$$x_{k_0}^{(i)}<x_0<x_{k_0+1}^{(i)}.$$

因此,可以取充分小的正數 $\delta$, 使

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}].$$

從而

$$m_{k_0}^{(i)}\leqslant m_\delta(x_0),$$

或是

$$\varphi_i(x_0)\leqslant m_\delta(x_0).$$

令 $\delta\to 0$, 乃得

$$\varphi_i(x_0)\leqslant m(x_0).$$

如果 $m(x_0)=-\infty$, 那末補助定理已經證明,今設 $m(x_0)>-\infty$ 而設

$$h<m(x_0).$$

那末有如下的 $\delta$, 使

$$m_\delta(x_0)>h,$$

固定 $\delta$, 而取 $i_0$ 甚大,使當 $i>i_0$ 時,

$$[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}]\subset(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

由於 $\lambda_i\to 0$, 所以這種 $i_0$ 當然是存在的。

對於 $i>i_0$, 存在着

$$m_{k_0}^{(i)}\geqslant m_\delta(x_0)>h,$$

也就是說

$$\varphi_i(x_0)>h.$$

這樣一來,對於每一個小於 $m(x_0)$ 的 $h$, 有如下的　當 $i>i_0$ 時,

$$h<\varphi_i(x_0)\leqslant m(x_0).$$

由是, $\varphi_i(x_0)\to m(x_0)$。補助定理證畢。

**系 1**　貝爾的函數 $m(x)$ 及 $M(x)$ 都是可測的。

事實上,分點 $\{x_k^{(i)}\}$ 的全體是一可列集,其測度爲 0。因此,由補助定理, $\varphi_i(x)$ 概收斂於 $m(x)$。

因爲 $\varphi_i(x)$ 是梯形函數,所以是可測的,因此 $m(x)$ 也是可測的。同樣, $M(x)$ 也是可測的。

**系 2**　假如補助定理中的函數 $f(x)$ 是有界的,那末

$$\lim_{i\to\infty}(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx=(L)\int_a^b m(x)dx.$$

事實上,當 $|f(x)|\leqslant K$ 時,

$$|\varphi_i(x)|\leqslant K,\quad |m(x)|\leqslant K.$$

因此 $\varphi_i(x)$ 與 $m(x)$ 都是$(L)$可積函數。應用 § 3 的勒貝格定理,卽得所要的結果。

現在我們對於系 2 給以進一步的解釋。我們注意到

$$(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx=\sum_{k=0}^{n_i-1}\int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}}\varphi_i(x)dx=\sum_{k=0}^{n_i-1}m_k^{(i)}[x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)}]=s_i,$$

其中 $s_i$ 是由第 $i$ 個分法所得的達布的小和。由是,系 2 表示

$$\lim_{i\to\infty} s_i=(L)\int_a^b m(x)dx.$$

同樣,達布的大和收斂於貝爾上函數的積分:

$$\lim_{i\to\infty} S_i=(L)\int_a^b M(x)dx.$$

因此

$$S_i-s_i\to(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx.$$

另一方面,在解析學裏,有界函數 $f(x)$ 爲 $(R)$ 可積的必要且充分條件是

$$S_i-s_i\to 0.$$

所以有界函數 $f(x)$ 爲 $(R)$ 可積的必要且充分條件是

$$(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx=0. \qquad (1)$$

此(1)式當 $M(x)-m(x)$ 對等於 0 時是成立的。反之,由於 $M(x)-m(x)\geqslant 0$, 從條件(1)得着

$$M(x)\sim m(x). \qquad (2)$$

由是,有界函數 $f(x)$ 爲 $(R)$ 可積的必要且充分條件是 (2)。

將此結果與定理 1 相聯系,得着下面的定理:

**定理 2**　$[a,b]$上的有界函數 $f(x)$ 爲 $(R)$ 可積的必要且充分的條件是: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中是幾乎處處連續的。

本定理是鑑定$(R)$可積性最簡明的方法,必須加以重視。在 §1 中我們曾經提到,只有不是"太不連續"的函數才是$(R)$可積的。這句話現

在也得到了解釋。

現在我們假設 $f(x)$ 是$(R)$可積的，那末 $f(x)$ 必爲有界並且等式

$$m(x)=M(x)$$

幾乎處處成立。又從

$$m(x)\leqslant f(x)\leqslant M(x),$$

所以等式

$$f(x)=m(x)$$

也幾乎處處成立。今 $f(x)$ 對等於可測函數 $m(x)$，所以 $f(x)$ 也是可測的。因有界可測函數是 $(L)$ 可積的，所以 $f(x)$ 是 $(L)$ 可積的。於是得到結果：依照黎曼意義可積的函數，依照勒貝格的意義也是可積的。

最後，由於 $f(x)$ 與 $m(x)$ 是對等的，所以

$$(L)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b m(x)dx.$$

但是，在基本補助定理的條件下，以 $s_i$ 表示對應於第 $i$ 分法的達布小和。當 $f(x)$ 爲$(R)$可積時，根據解析學的知識，

$$s_i\to(R)\int_a^b f(x)dx.$$

但是，我們已經證得

$$s_i\to(L)\int_a^b f(x)dx.$$

所以

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx.$$

因此我們得到

**定理 3**　$(R)$可積的函數必爲$(L)$可積。且兩積分的値相等。

末了我們注意到下面的事實：迪列克來函數 $\psi(x)$（在無理點等於0，有理點等於 1 ）是一個對等於 0 的函數，所以是 $(L)$ 可積的。但是 $\psi(x)$ 却不是$(R)$可積的（已在 § 1 中講過）。於此可見定理 3 之逆是不成眞理的。

## § 5　原函數的獲得

設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上所定義的連續函數，在 $[a,b]$ 中每一點 $f(x)$ 有一定的導數 $f'(x)$（兩端點 $a$ 與 $b$ 光是單方導數）。現在問：從已知的 $f'(x)$ 如何獲得 $f(x)$？

在解析學上所熟知的是：假如 $f'(x)$ 是 $(R)$ 可積的，那末

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.$$

但是有實例[1] 表示 $f'(x)$ 爲有界時，$f'(x)$ 未必是 $(R)$ 可積的。因此用黎曼積分，不能解决求原函數的問題。勒貝格積分是解决此問題的有力工具。

**定理**　設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中每點有一定的導數 $f'(x)$。假如導函數 $f'(x)$ 爲有界，那末 $f'(x)$ 是 $(L)$ 可積的，且

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.$$

**證明**　由於 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 中每點爲有限，故 $f(x)$ 是一連續函

1）參閱阿力山大洛夫與柯爾莫廓洛夫的實變數函數論第三版（1938）215 頁上的例子。

數。將 $f(x)$ 的定義範圍擴大爲 $[a,b+1]$，當 $b<x\leqslant b+1$ 時，規定

$$f(x)=f(b)+(x-b)f'(b).$$

函數 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 是連續的，並且 $f'(x)$ 是一有限函數。

在區間 $[a,b]$ 上作函數列

$$\varphi_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\quad(n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

那末關係

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)$$

在 $[a,b]$ 上處處成立。因爲連續函數 $\varphi_n(x)$ 是可測的，所以 $f'(x)$ 是一可測函數。再加上 $f'(x)$ 爲有界的條件，斷定 $f'(x)$ 是 $(L)$ 可積的。

由蘭格倫日公式

$$\varphi_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\quad(0<\theta<1),$$

因此函數列 $\varphi_n(x)\,(n=1,2,3,\cdots)$ 是均勻有界。用勒貝格的關於積分符號下極限運算的定理，乃得

$$\int_a^b f'(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx.\tag{1}$$

但是

$$\int_a^b\varphi_n(x)dx=n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx-n\int_a^b f(x)dx=$$

$$=n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-n\int_a^b f(x)dx.$$

(關於 $f(x+\frac{1}{n})$ 的積分用到變數替換一事解釋如下：由於這個函數是連續的，此積分可以看作一個黎曼積分。因此用到變數替換是不足爲奇的)。因此

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx=n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

對於上式右邊兩個積分,用平均值定理,乃得

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx=f\left(b+\frac{\theta_n'}{n}\right)-f\left(a+\frac{\theta_n''}{n}\right)\quad (0<\theta_n'<1,0<\theta_n''<1)$$

又由 $f(x)$ 的連續性,得着

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx=f(b)-f(a).$$

再由(1)式,乃得

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx.$$

將 $b$ 改爲 $[a,b]$ 中的任意一點 $x$, 即得定理的結果。

# 第六章　(L)可積函數

## §1　可測正值函數的積分

在本章中，我們將勒貝格的積分定義，加以拓廣，目的在使無界可測函數可以積分。首先研討正值函數的積分。這裏所謂正值函數$f(x)$，是指$f(x)\geqslant 0$的意思。

**補助定理 1**　設$f(x)$是在可測集$E$上定義的可測正值函數。設$N$是一自然數，置

$$[f(x)]_N=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leqslant N) \\ N & (f(x)>N), \end{cases}$$

那末$[f(x)]_N$是一可測函數。

**證明**　由等式

$$E([f]_N>a)=\begin{cases} E(f>a) & (a<N) \\ 0 & (a\geqslant N), \end{cases}$$

即知補助定理是眞的。

可測函數$[f(x)]_N$在補助定理的假定下是有界的，所以是(L)可積的，又從

$$[f(x)]_1\leqslant[f(x)]_2\leqslant[f(x)]_3\leqslant\cdots\cdots,$$

得

$$\int_E[f]_1dx\leqslant\int_E[f]_2dx\leqslant\int_E[f]_3dx\leqslant\cdots\cdots,$$

所以下面的極限是存在的(有限或無限)：

$$\lim_{N\to+\infty}\int_E [f(x)]_N dx. \qquad (*)$$

**定義** (*)所表示的極限稱爲 $f(x)$ 在 $E$ 上的勒貝格積分，以記號

$$\int_E f(x)dx$$

表示它。如果這個積分是一有限數，那末稱函數 $f(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的。

因此，對於可測正值函數，常可寫出它的積分，但是僅當積分是有限時才稱這個函數是$(L)$可積的。

對於勒貝格意義的積分，記作

$$(L)\int_E f(x)dx.$$

當 $E=[a,b]$ 時，則又記作

$$\int_a^b f(x)dx$$

不難明白，如果可測函數是有界且正值的話，新的積分定義與老的積分定義是一致的，因爲當$N$甚大時，

$$[f(x)]_N \equiv f(x)$$

之故。因此，凡有界(可測正值)函數依照本節的定義是$(L)$可積的。

所要留心的是：在本節中凡是提到 $\int_E f(x)dx$，總是默認 $f(x)$ 是可測正值的。*)

**定理 1** 如果 $f(x)$ 在$E$上是$(L)$可積，那末它在$E$上概爲有限。

**證明** 置

*) 這句話是譯者加添上去的。

$$A=E(f=+\infty).$$

在 $A$ 上，$[f(x)]_N=N$，因此

$$\int_E [f]_N dx \geqslant \int_A [f]_N dx = N\cdot mA.$$

假如 $mA>0$，那末當 $N\to\infty$ 時，$\int_E [f]_N dx\to+\infty$。這是與假設 $f(x)$ 爲(L)可積不相容，故必 $mA=0$。

**定理 2** 若 $mE=0$，則一切正值函數 $f(x)$ 在 $E$ 上爲(L)可積，且適合

$$\int_E f(x)dx=0.$$

本定理是很明顯的。

**定理 3** 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $E$ 上的兩個對等函數，則

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

事實上，在等式 $f(x)=g(x)$ 成立的點 $x$，$[f(x)]_N=[g(x)]_N$。所以 $[f(x)]_N$ 和 $[g(x)]_N$ 也是對等函數。其餘的證明顯而易見。

**定理 4** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上定義的可測正值函數，$E_0$ 是 $E$ 的一個可測子集，則

$$\int_{E_0} f(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.$$

事實上，如果將 $f(x)$ 改爲 $[f(x)]_N$，那末這個不等式就很顯然了。令 $N\to\infty$，即得定理中的結果。特別，當 $f(x)$ 在 $E$ 上是(L)可積時，則 $f(x_0)$ 在 $E_0$ 上也是(L)可積的。

**定理 5** 設 $f(x)$ 和 $F(x)$ 是在 $E$ 上所定義的可測正值函數，則當

$f(x)\leqslant F(x)$ 時

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E F(x)dx.$$

事實上，將不等式

$$[f(x)]_N\leqslant[F(x)]_N$$

兩邊的積分，取其極限即得所要的結果。

特別，當 $F(x)$ 是 $(L)$ 可積時，則 $f(x)$ 也是 $(L)$ 可積的。

**定理 6** 若 $\int_E f(x)dx=0$, 則 $f(x)$ 對等於 0 。

**證明** 因爲

$$0\leqslant\int_E [f(x)]_N dx\leqslant\int_E f(x)dx=0,$$

所以 $[f(x)]_N$ (對於所有的 $N$)對等於 0。設

$$A=\sum_{N=1}^{\infty} E([f]_N\neq 0),$$

則 $mA=0$。因爲對於 $E$ 中所有的 $x$ 是

$$\lim_{N\to+\infty}[f(x)]_N=f(x),$$

所以當 $x\in E-A$ 時，$f(x)=0$。

**定理 7** 設 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 是在 $E$ 上所定義的兩個可測正值函數。若 $f(x)=f'(x)+f''(x)$, 則

$$\int_E f(x)dx=\int_E f'(x)dx+\int_E f''(x)dx.$$

**證明** 事實上，從

$$[f'(x)]_N+[f''(x)]_N\leqslant f(x),$$

得

$$\int_E [f'(x)]_N dx + \int_E [f''(x)]_N dx \leqslant \int_E f(x) dx.$$

令 $N\to\infty$,乃得

$$\int_E f' dx + \int_E f'' dx \leqslant \int_E f dx. \tag{1}$$

要證明(1)是等式,首先證明對於所有的 $N$,

$$[f(x)]_N \leqslant [f'(x)]_N + [f''(x)]_N. \tag{2}$$

設 $x_0\in E$。如果

$$f'(x_0)\leqslant N, \quad f''(x_0)\leqslant N,$$

則

$$[f(x_0)]_N \leqslant f(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0) = [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N.$$

如果 $f'(x_0)$ 與 $f''(x_0)$ 中有一個大於 $N$,那末

$$[f(x_0)]_N = N \leqslant [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N$$

也是成立的;因爲右方兩項中有一項等於 $N$,其餘一項 $\geqslant 0$。所以(2)是成立的。

將(2)式積分,得着

$$\int_E [f]_N dx \leqslant \int_E [f']_N dx + \int_E [f'']_N dx.$$

從而

$$\int_E [f]_N dx \leqslant \int_E f' dx + \int_E f'' dx.$$

再令 $N\to\infty$,乃得

$$\int_E f dx \leqslant \int_E f' dx + \int_E f'' dx. \tag{3}$$

由(1)於(3),乃得所要的結果。特別當 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 都是$(L)$可積時,$f(x)$ 也是$(L)$可積的。

**定理 8** 設 $f(x)$ 是在 $E$ 上所定義的可測正値函數,$k\geqslant 0$,則

$$\int_E kf(x)dx = k\int_E f(x)dx.$$

**證明** 若 $k=0$,則定理自眞。若 $k$ 是一自然數,則本定理是定理 7 的結果。如果 $k=\frac{1}{m}$,而 $m$ 是自然數,則由

$$\int_E f(x)dx = m\int_E \frac{1}{m}f(x)dx$$

得

$$\int_E \frac{1}{m}f(x)dx = \frac{1}{m}\int_E f(x)dx.$$

由是可知當 $k$ 爲正有理數時定理成立。最後,設 $k$ 是一正的無理數,則取如下的正有理數 $r$ 和 $R$: $r<k<R$。由定理 5,得

$$r\int_E f(x)dx \leqslant \int_E kf(x)dx \leqslant R\int_E f(x)dx,$$

令 $r$ 與 $R$ 趨近於 $k$,卽得所要證明的結果。

特別,$f(x)$ 是$(L)$可積的話,$kf(x)$ 也是$(L)$可積的。

下面要證明一個非常重要的定理。在此以前,先證明下面的補助定理。

**補助定理 2** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=F(x_0)$,則對於所有的自然數 $N$,

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x_0)]_N = [F(x_0)]_N.$$

**證明** 如果 $F(x_0)>N$,則當 $n$ 適當大時,$f_n(x_0)>N$。因此(對

於這種 $n$)

$$[f_n(x_0)]_N=N=[F(x_0)]_N.$$

同樣的，如果 $F(x_0)<N$，則當 $n$ 適當大時，$f_n(x_0)<N$。因此，

$$[f_n(x_0)]_N=f_n(x_0)\to F(x_0)=[F(x_0)]_N.$$

剩下來是 $F(x_0)=N$。此時對於任一正數 $\varepsilon$，有如下的 $n_0$：當 $n>n_0$ 時，

$$f_n(x_0)>N-\varepsilon.$$

因此，

$$N-\varepsilon<[f_n(x_0)]_N\leqslant N.$$

卽

$$|[F(x_0)]_N-[f_n(x_0)]_N|<\varepsilon \qquad (n>n_0).$$

於是，對於無論那種情形，補助定理是眞的。

**定理 9**（法都）　設 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots$ 是在 $E$ 上概收斂於 $F(x)$ 的可測正值函數列，則

$$\int_E F(x)dx\leqslant\sup\left\{\int_E f_n(x)dx\right\}^{1)} \qquad (*)$$

**證明**　由補助定理，當 $n\to\infty$ 時，關係

$$[f_n(x)]_N\to[F(x)]_N$$

在 $E$ 上幾乎處處成立。

由於 $[f_n(x)]_N\leqslant N$，所以我們可以應用勒貝格關於在積分號下取

1) 本定理中概收斂的條件改爲度量收斂時亦成眞理。事實上，在這個情形下，從 $\{f_n(x)\}$ 可以選取概收斂於 $F(x)$ 的子函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$，再從 $\sup\left\{\int_E f_{n_k}(x)dx\right\}\leqslant\sup\left\{\int_E f_n(x)\,dx\right\}$ 就可明白。不過這個附註並非是定理 9 的擴充。因爲在定理 9 中可以允許 $F(x)\equiv+\infty$，而就度量收斂而言，却不包含這種情形。

極限的定理，而得

$$\int_E [F]_N dx = \lim_{n\to\infty} \int_E [f_n]_N dx.$$

由於

$$\int_E [f_n]_N dx \leqslant \int_E f_n dx \leqslant \sup\left\{\int_E f_n dx\right\},$$

令 $n\to\infty$，乃得

$$\int_E [F]_N dx \leqslant \sup\left\{\int_E f_n dx\right\}.$$

再令 $N\to\infty$，即得本定理。特別當所有的 $f_n(x)$ 爲 $(L)$ 可積且

$$\int_E f_n(x)dx \leqslant A < +\infty$$

時，極限函數 $F(x)$ 亦爲 $(L)$ 可積。

系 如果函數列 $\{f_n(x)\}$ 滿足定理中所說的條件，則當極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \tag{4}$$

存在時，

$$\int_E F(x)dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx. \tag{5}$$

**證明** 如果極限(4)是 $+\infty$，則本系顯然成立。現在假設

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dx = l < +\infty.$$

那末對於任意的正數 $\varepsilon$，有如下的 $n_0$：當 $n\geqslant n_0$ 時，

$$\int_E f_n dx < l+\varepsilon.$$

將定理用到函數列 $f_{n_0}(x)$, $f_{n_0+1}(x)$,……, 乃得

$$\int_E F dx \leqslant l+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 乃得 (5)。

由此系之助,容易得到關於積分號下取極限的定理。

**定理 10**(勒維) 設在 $E$ 上, 有收斂於 $F(x)$ 的可測正値函數列 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$。若

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)\leqslant \cdots\cdots$$

則

$$\int_E F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

**證明** 因極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

存在,所以由定理 9 的系,

$$\int_E F dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx.$$

另一方面,從 $f_n(x)\leqslant F(x)$, 得

$$\int_E f_n(x)dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

從而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

定理由是證畢。

**定理 11** 設在集 $E$ 上有可測的正値函數列 $u_1(x)$, $u_2(x)$,……。若

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = F(x),$$

則

$$\int_E F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)dx.$$

事實上，置

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

此定理是定理 10 的别種形式。

系　在定理 11 所說的條件下，則當

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)dx < +\infty$$

時，等式

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = 0 \tag{6}$$

在$E$上幾乎處處成立。

事實上，在此情形下，$F(x)$ 是一 $(L)$ 可積函數，因此它是概爲有限的。換言之，級數 $\sum u_k(x)$ 是幾乎處處收斂的，在收斂的點，(6) 式自然成立。

**定理 12**（積分的完全可加性）　設可測集 $E$ 是有限個或可列無限個兩兩不相交的可測集 $E_k$ 的和集：

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0, k \neq k').$$

那末對於所有在$E$上定義的可測正值函數 $f(x)$，成立着等式：

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

**證明** 作如下的函數 $u_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots\cdots)$:

$$u_k(x)=\begin{cases} f(x), & (x\in E_k), \\ 0, & (x\in E-E_k). \end{cases}$$

那末,

$$f(x)=\sum_k u_k(x).$$

因此,由定理 7 與定理 11, 得

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_E u_k(x)dx. \tag{7}$$

其中積分 $\int_E u_k(x)dx$ 可改算如下:

因

$$[u_k(x)]_N=\begin{cases} [f(x)]_N, & (x\in E_k) \\ 0, & (x\in E-E_k), \end{cases}$$

所以

$$\int_E [u_k]_N dx = \int_{E_k} [f]_N dx.$$

令 $N\to\infty$, 得

$$\int_E u_k dx = \int_{E_k} f dx.$$

代入(7)式即得所要的結果。

## § 2 一般的 (L) 可積函數

現在對於一般的無界可測函數給以勒貝格積分定義。結果是: 這

種推廣，並非對於所有的可測函數都是可能的。

設 $f(x)$ 是在可測集 $E$ 上定義的可測函數。從 $f(x)$，定義 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 如下：

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & (f(x)\geqslant 0),\\ 0, & (f(x)<0);\end{cases}\quad f_-(x)=\begin{cases} 0, & (f(x)\geqslant 0),\\ -f(x), & (f(x)<0).\end{cases}$$

那末 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 都是可測的正值函數。所以

$$\int_E f_+(x)dx \text{ 和 } \int_E f_-(x)dx$$

都是存在的。因爲

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),$$

所以規定

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

爲 $f(x)$ 的積分，但是

$$+\infty-(+\infty)$$

是沒有意義的，所以

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

是當並且只有當 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 中有一個爲$(L)$可積時才有意義。

**定義 1** 如果 $f_+(x)$ 與 $f_-(x)$ 中有一個在 $E$ 上爲$(L)$可積，則定

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

爲 $f(x)$ 在 $E$ 上的勒貝格積分(有限或無限)，且以記號

$$\int_E f(x)dx \tag{1}$$

表示它。

如果可測函數 $f(x)$ 為有界，則 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 都是有界。因此，對於有界函數的積分，新的定義與老的定義是一致的。假如 $f(x)$ 是一正值函數，那末

$$f_+(x)=f(x),\ f_-(x)=0,$$

可見新的積分定義與老的定義也是一致的。

積分(1)表示一個有限數的必要且充分條件是 $f_+(x)$ 與 $f_-(x)$ 都是($L$)可積。

**定義 2**　當積分 $\int_E f(x)dx$ 表示一個有限數時，稱 $f(x)$ 在 $E$ 上是勒貝格可積的，或簡稱為($L$)可積。

凡有界可測函數是 ($L$) 可積的。對於正值函數而言，新的可積定義與老的一致。

記 ($L$) 可積函數的全體為 $L$。那末當 $f(x)$ 是一 ($L$) 可積函數時，可以寫為：$f(x)\in L$。

**定理 1**　函數 $f(x)\in L$ 的必要且充分條件是：$|f(x)|\in L$。當此條件滿足時，成立着

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|dx.$$

**證明**　因

$$|f(x)|=f_+(x)+f_-(x),$$

由 §1 定理 7，得

$$\int_E |f(x)|dx=\int_E f_+(x)dx+\int_E f_-(x)dx,$$

從而可見定理成立。

下面幾件事情是本定理的系:

I. $(L)$可積函數是概爲有限的。

II. 若 $mE=0$, 則一切函數$f(x)$ 在 $E$ 上恆爲$(L)$可積且

$$\int_E f(x)dx=0 .$$

III. 函數若在 $E$ 上爲$(L)$可積, 則在 $E$ 的任一可測子集上也是$(L)$可積的。

IV. 設函數 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在$E$ 上是可測的,且 $|f(x)|\leqslant F(x)$ 。若 $F(x)$ 是 $(L)$ 可積,則$f(x)$ 也是$(L)$ 可積。

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $E$ 上是對等的兩個函數, 則$f_+(x)$ 與 $g_+(x)$ 對等, $f_-(x)$ 與 $g_-(x)$ 對等。因此,下面的定理成立。

**定理 2** 設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲對等, 兩積分 $\int_E f(x)dx$ 與 $\int_E g(x)dx$ 中有一個存在的話,那末兩個積分都存在並且相等。

因此,對等的兩個函數$f(x)$ 和 $g(x)$ 是同時 $(L)$ 可積的或同時不是 $(L)$ 可積的。以後我們對於對等函數不加以區別。這種規定是有用處的: 例如對於兩個 $(L)$ 可積函數的和$f'(x)+f''(x)$, 在某些點 $x$, 可能有 $\infty-\infty$ 的現象,這種點 $x$ 不妨置之不理;因爲這些點的全體,其測度等於 0 。 在這種點, 將被加的函數改變它們的數值所得的函數仍舊是對等的。

**定理 3** (積分的有限可加性) 設 $E$ 是有限個兩兩不相交的可測集的和集:

$$E=\sum_{k=1}^{n} E_k \qquad (E_kE_{k'}=0, k\neq k').$$

假如函數$f(x)$ 在每一個 $E_k$ 上是 $(L)$ 可積的,則在 $E$ 上也是 $(L)$ 可積

的，並且

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx.$$

**證明**　由§1的定理12，

$$\int_E f_+dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_+dx,$$

$$\int_E f_-dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_-dx.$$

兩等式的右方都是有限數，因此左方也是有限數。從第一式減去第二式，即得所要的結果。

當被加集的個數是可列個時，雖然 $f(x)$ 在每一個被加集上是 $(L)$ 可積，$f(x)$ 在它們的和集上未必為 $(L)$ 可積。

**例**　設 $f(x)$ 是 $(0,1]$ 上之一函數，其定義如下：

$$f(x)=\begin{cases} n, & \left(\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}<x\leqslant\dfrac{1}{n}\right), \\ -n, & \left(\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}\right). \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

那末 $f(x)$ 在每一個 $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ 上是 $(L)$ 可積的，並且

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx=0, \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

但是$f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上並不是$(L)$可積的。事實上,

$$\int_0^1 |f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

另一方面,存在着下面的定理。

**定理 4** 如果函數 $f(x)$ 在集 $E$ 上是$(L)$可積, $E$ 是可列個兩兩不相交的可測集的和集:

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k \qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

那末

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx. \tag{2}$$

**定理 5** 設可測集 $E$ 是可列個兩兩不相交的可測集 $E_k$ 的和集。若 $f(x)$ 在每一個 $E_k$ 上是$(L)$可積,又若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx<+\infty,$$

則 $f(x)$ 在 $E$ 上也是$(L)$可積的且(2)式成立。

**證明** 當定理 4 的條件成立時,則由 § 1 的定理 12, 得着

$$\int_E f_+dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f_+dx,\quad \int_E f_-dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f_-dx,$$

並且上述二等式的左方是有限的(因此右方也自然是有限的)。作二式之差卽得定理 4 的結果。

當定理 5 的條件成立時，則(由 § 1 的定理 12)

$$\int_E |f|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f|dx,$$

由此得到$|f|$在 $E$ 上是(L)可積的。再由定理 4 卽得定理 5 的結果。

由上面所舉的例子，知道定理 5 中最後一個條件不能改爲級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx$$

的收斂。

**定理 6**　如果 $f(x)$ 在 $E$ 上爲 (L) 可積，$k$ 爲一有限常數，則函數 $kf(x)$ 在 $E$ 上也是 (L) 可積的，並且

$$\int_E kf(x)dx=k\int_E f(x)dx.$$

**證明**　當 $k=0$ 時定理自眞。若 $k>0$，則因

$$(kf)_+=kf_+,\quad (kf)_-=kf_-,$$

定理可以歸到 § 1 的定理 8。(申言之：作兩等式 $\int_E (kf)_+dx=k\int_E f_+dx$ 和 $\int_E (kf)_-dx=k\int_E f_-dx$ 的差卽得)。

最後，設 $k<0$。若 $k=-1$，則因

$$(-f)_+=f_-,\quad (-f)_-=f_+,$$

所以，

$$\int_E -f(x)dx=\int_E f_-(x)dx-\int_E f_+dx=-\int_E f(x)dx.$$

因此，當 $k=-1$ 時定理也成立。若 $k$ 是任意的負數，則

$$\int_E kf(x)dx=-\int_E |k|f(x)dx=-|k|\int_E f(x)dx=k\int_E f(x)dx.$$

所以定理成立。

**系** 如果 $f(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積，而 $\varphi(x)$ 在 $E$ 上是一有界可測函數，則 $\varphi(x)f(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的。

事實上，設 $K=\sup\{|\varphi(x)|\}$，則 $|\varphi(x)f(x)|\leqslant K|f(x)|$.

**定理 7** 設函數 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $E$ 上爲 $(L)$ 可積，則 $f(x)=f'(x)+f''(x)$ 在 $E$ 上亦爲 $(L)$ 可積，且

$$\int_E f(x)dx=\int_E f'(x)dx+\int_E f''(x)dx. \tag{3}$$

**證明** 函數 $f(x)$ 之可積，由於

$$|f(x)|\leqslant|f'(x)|+|f''(x)|.$$

所要證的是(3)式的成立。設

$$E_1=E(f'\geqslant0,f''\geqslant0);\qquad E_2=E(f'<0,f''<0);$$

$$E_3=E(f'\geqslant0,f''<0,f\geqslant0);\quad E_4=E(f'\geqslant0,f''<0,f<0);$$

$$E_5=E(f'<0,f''\geqslant0,f\geqslant0);\quad E_6=E(f'<0,f''\geqslant0,f<0).$$

則

$$E=\sum_{k=1}^{6}E_k\qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

因此所要證的是

$$\int_{E_k}f\,dx=\int_{E_k}f'dx+\int_{E_k}f''dx\qquad(k=1,2,\cdots,6).$$

上面六式可以一一證明。例如當 $k=6$ 時，將等式

$$f(x)=f'(x)+f''(x)$$

改寫爲

$$-f'(x)=f''(x)+[-f(x)],$$

那末右邊兩項在 $E_6$ 上都是正值函數。因此，由 § 1 的定理 7，得

$$\int_{E_6}(-f')dx=\int_{E_6}f''dx+\int_{E_6}(-f)dx.$$

從而

$$\int_{E_6}fdx=\int_{E_6}f'dx+\int_{E_6}f''(x)dx.$$

定理因此證畢。

下面的定理是非常重要的。

**定理 8** 假如函數 $f(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的，那末對於任一正數 $\varepsilon$，有正數 $\delta$，當 $e\subset E$，$me<\delta$ 時，

$$\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

**證明** 因 $f(x)$ 是$(L)$可積的，所以 $|f(x)|$ 也是$(L)$可積的。由正值函數的積分定義，有 $N_0$ 使

$$\int_E |f(x)|dx-\int_E [|f(x)|]_{N_0}dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立。正數

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2N_0}.$$

就是適合條件的 $\delta$。事實上，

$$|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}$$

在 $E$ 上是一正值函數，所以對於 $E$ 中任一可測子集 $e$，不等式

$$\int_e \{|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}\}dx\leqslant\int_E \{|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}\}dx$$

成立。從而

$$\int_e |f(x)|dx - \int_e [|f(x)|]_{N_0}dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\int_e |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_e [|f(x)|]_{N_0}dx.$$

但是

$$[|f(x)|]_{N_0} \leqslant N_0,$$

所以

$$\int_e [|f(x)]_{N_0}dx \leqslant N_0 me.$$

於是

$$\int_e |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 me < \varepsilon.$$

定理證畢。

這個性質稱爲$(L)$積分的絕對連續性。

## § 3 積分號下取極限

第五章 § 3 中的勒貝格定理，允許着下面的擴張。

**定理 1**（勒貝格） 設 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,⋯⋯ 是在$E$上度量收斂於 $F(x)$ 的可測函數列。假如有$(L)$可積函數 $\Phi(x)$ 適合於

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x),\ x \in E,\ n = 1, 2, \cdots\cdots \tag{*}$$

那末

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx.$$

**證明** 條件(*)肯定了每一個 $f_n(x)$ 的 $(L)$ 可積性。同時我們知

道

$$|F(x)|\leqslant\Phi(x) \tag{1}$$

幾乎對於所有的 $x$ 成立。事實上，利用黎斯定理，$\{f_n(x)\}$ 中有子函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 概收斂於 $F(x)$。從

$$|f_{n_k}(x)|\leqslant\Phi(x),$$

乃知(1)式對於幾乎所有的 $x$ 成立。

現在改變 $F(x)$ 的函數值，使 (1) 式處處成立，所改變的地方成一測度爲 0 的集。於是由 (1)，得到 $F(x)$ 的 $(L)$ 可積性。

對於任一正數 $\sigma$，置

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-F|\geqslant\sigma),\ B_n(\sigma)=E(|f_n-F|<\sigma),$$

則

$$E=A_n(\sigma)+B_n(\sigma),\ A_n(\sigma)\cdot B_n(\sigma)=0.$$

當 $n\to\infty$ 時

$$mA_n(\sigma)\to 0.$$

今估計下列不等式：

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\leqslant\int_E |f_n-F|dx=\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-F|dx,$$

因在 $B_n(\sigma)$ 上，$|f_n-F|<\sigma$，故

$$\int_{B_n(\sigma)}|f_n-F|dx\leqslant\sigma\cdot mB_n(\sigma)\leqslant\sigma\cdot mE,$$

另一方面，因

$$|f_n-F|\leqslant 2\Phi(x),$$

故

$$\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx\leqslant 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx.$$

所以

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\leqslant 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx+\sigma\cdot mE. \qquad (2)$$

對於正數 $\varepsilon$, 取正數 $\sigma$ 使

$$\sigma\cdot mE<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

然後取正數 $\delta$, 使一切可測集 $e\subset E$, $me<\delta$ 時關係

$$\int_e \Phi(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}$$

成立,這是由於 $\Phi(x)$ 的積分的絕對連續性。

最後取如下的 $n_0$, 當 $n>n_0$ 時,

$$mA_n(\sigma)<\delta.$$

因此,

$$2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

總合 (2),(3),(4), 則當 $n>n_0$ 時,

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E F(x)dx\right|<\varepsilon.$$

定理證畢。

系 在定理中所述的假設下,關係

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x)f_n(x)dx=\int_E \varphi(x)F(x)dx$$

成立,其中 $\varphi(x)$ 是任意的有界可測函數。

事實上,設 $|\varphi(x)|\leqslant K$, 則

$$|\varphi(x)f_n(x)|\leqslant K\Phi(x).$$

所以條件(*)是滿足的。剩下來的是要證明

$$\varphi(x)f_n(x)\Longrightarrow\varphi(x)F(x).$$

此由

$$E(|\varphi f_n-\varphi F|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-F|\geqslant\frac{\sigma}{K}\right)$$

卽明。

定理 1 還可以加以擴充。首先介紹一個重要的概念：設在可測集 $E$ 上，有一族的 $(L)$ 可積函數 $M=\{f(x)\}$。設 $f_0(x)\in M$，則對於任一正數 $\varepsilon$，有正數 $\delta$，當

$$e\subset E,\quad me<\delta$$

時，不等式

$$\left|\int_e f_0(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立。但此 $\delta$ 與 $M$ 中的函數 $f_0(x)$ 有關係。一般的說，對於 $M$ 中一切函數可以通用的 $\delta$ 是不存在的，這個情況提示下面的定義。

**定義** 設 $M=\{f(x)\}$ 是在 $E$ 上定義的 $(L)$ 可積函數族。如果對於任意的正數 $\varepsilon$，有如下正數 $\delta$ 存在，當

$$e\subset E,\ me<\delta$$

時，不論 $f(x)$ 是 $M$ 中那一個函數，不等式

$$\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立的話，稱此函數族在 $E$ 上有等度的絕對連續積分。

**定理 2**（維他利） 設 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots\cdots$ 是在可測集 $E$ 上度量收斂於 $F(x)$ 的 $(L)$ 可積函數列。如果這些函數 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上有等度的絕對連續積分，則 $F(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E F(x)dx.$$

**證明** 首先說明 $F(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的。由假設，對於任一正數 $\varepsilon$，有正數 $\delta$，當 $me<\delta$ 時，

$$\left|\int_e f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

設 $e\subset E$，$me<\delta$。置

$$e_+=e(f_n\geqslant 0),\ e_-=e(f_n<0),$$

則

$$me_+<\delta,\quad me_-<\delta.$$

因此，

$$\int_{e_+}|f_n|dx=\left|\int_{e_+}f_n dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \int_{e_-}|f_n|dx=\left|\int_{e_-}f_n dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

從而

$$\int_e |f_n(x)|dx<\varepsilon. \tag{5}$$

這就是說：函數列 $\{|f_n(x)|\}$ 在 $E$ 上也有等度的絕對連續積分。

依黎斯定理，有子函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 概收斂於 $F(x)$。由 (5) 與 § 1 中法都的定理，得到

$$\int_e |F(x)|dx\leqslant\varepsilon. \tag{6}$$

所以 $F(x)$ 在 $e$ 上是 $(L)$ 可積的。但是 $e$ 是測度小於 $\delta$ 的 $E$ 中任一子集。$E$ 可以分解爲有限個測度小於 $\delta$ 的子集的和集，因此 $F(x)$ 在 $E$ 上是 $(L)$ 可積的。

現在我們可以着手證明定理中的主要論斷。設 $\sigma>0$，置

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-F|\geqslant\sigma),\ B_n(\sigma)=E(|f_n-F|<\sigma),$$

則

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\leqslant\int_{A_n(\sigma)}|f_n-F|dx+\sigma\cdot mE.$$

從而

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|\leqslant\int_{A_n(\sigma)}|f_n|dx+\int_{A_n(\sigma)}|F|dx+\sigma\cdot mE. \tag{7}$$

對於正數 $\varepsilon$, 取正數 $\sigma$, 使

$$\sigma\cdot mE<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由於在開首時已證的事實· 對於 $\varepsilon>0$, 存在着如下的正數 $\delta$, 當

$$e\subset E,\ me<\delta$$

時(參看(5)及(6)),不等式

$$\int_e |f_n|dx<\frac{\varepsilon}{3}\text{ 與 }\int_e |F|dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

成立。但當 $n>n_0$ 時,

$$mA_n(\sigma)<\delta,$$

因此(7)式變成

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E F dx\right|<\varepsilon.$$

定理證畢。

系 在定理中所述的假設下,等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x)f_n(x)dx=\int_E \varphi(x)F(x)dx$$

成立,其中 $\varphi(x)$ 是任意的有界可測函數。

事實上，如果 $|\varphi(x)|\leqslant K$, 則

$$\left|\int_e \varphi(x)f_n(x)dx\right|\leqslant K\int_e |f_n(x)|dx.$$

因此 $\{\varphi(x)f_n(x)\}$ 中所有函數，也有等度的絕對連續積分。

我們還可以證明，上述之系的逆也是眞的。爲此，我們必須首先證明下面的重要定理。

**定理 3**（勒貝格） 設 $\{f_n(x)\}$ 是在可測集 $E$ 上的一列 $(L)$ 可積函數。若對於 $E$ 中任何可測子集 $e$，等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx=0 \tag{8}$$

成立，則函數列 $\{f_n(x)\}$ 有等度的絕對連續積分。

**證明** 假如定理不成立，那末存在着如下的正數 $\varepsilon_0$：對於任意的正數 $\delta$，可以找到一個可測集 $e\subset E$ 具有測度 $me<\delta$ 和足數 $n$ 使

$$\left|\int_e f_n(x)\right|\geqslant \varepsilon_0. \tag{9}$$

固定 $\delta$ 而看最初的 $N$ 個函數 $f_1(x), f_2(x),\cdots,f_N(x)$。對於每一個 $f_k(x)$ 可以找到 $\delta_k$，當 $me<\delta_k(e\subset E)$ 時，使

$$\left|\int_e f_k(x)dx\right|<\varepsilon_0 \tag{10}$$

成立。

將 $\delta,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_N$ 中的最小數記爲 $\delta^*$。根據上面所說的事實，對於此 $\delta^*$，可以找到可測集 $e\subset E$ 具有測度 $me<\delta^*$ 和足數 $n$ 而使(9)式成立。另一方面，因 $me<\delta_k(k=1,2,\cdots,N)$，所以當 $k=1,2,\cdots,N$ 時(10)式成立。因此使(9)成立的 $n$ 必定大於 $N$。

據此，正數 $\varepsilon_0$ 具有如下的性質：對於任意的正數 $\delta$ 和正整數 $N$，有可測集 $e\subset E$ 和足數 $n$ 使

$$n>N,\ me<\delta,\ \left|\int_e f_n(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0$$

成立。現在我們固定某一個 $e_1\subset E$ 和足數 $n_1$ 使得滿足

$$\left|\int_{e_1} f_{n_1}(x)dx\right| \geqslant \epsilon_0.$$

基於函數 $f_{n_1}(x)$ 的積分的絕對連續性,可以找到 $\delta_1>0$ 使得當集 $e\subset E$ 而 $me<\delta_1$ 時

$$\left|\int_{e} f_{n_1}(x)dx\right| < \frac{\epsilon_0}{4}$$

成立。

根據上面所述,那末可以取集 $e_2\subset E$ 和足數 $n_2$ 使

$$n_2>n_1,\quad me_2<\frac{\delta_1}{2},\ \left|\int_{e_2} f_{n_2}(x)dx\right| \geqslant \epsilon_0$$

成立。然後再取 $\delta_2>0$ 使得當 $me<\delta_2(e\subset E)$ 時

$$\left|\int_{e} f_{n_2}(x)dx\right| < \frac{\epsilon_0}{4}$$

成立。不難明白: $\delta_2<\frac{\delta_1}{2}$。

再做同樣的手續,那末可以取集 $e_3\subset E$ 和足數 $n_3$, 使

$$n_3>n_2,\quad me_3<\frac{\delta_2}{2},\ \left|\int_{e_3} f_{n_3}(x)dx\right| \geqslant \epsilon_0$$

成立。然後可取 $\delta_3>0$ 使當 $me<\delta_3(e\subset E)$ 時

$$\left|\int_{e} f_{n_3}(x)dx\right| < \frac{\epsilon_0}{4}.$$

成立。顯然的是: $\delta_3<\frac{\delta_2}{2}$。

這種手續繼續進行,於是我們得到 $E$ 的可測子集列 $\{e_k\}$, 單調常增的足數列 $\{n_k\}$ 及正數列 $\{\delta_k\}$ 具有如下的性質:

1) $$\left|\int_{e_k} f_{n_k}(x)dx\right| \geqslant \epsilon_0,$$

2) $$me_{k+1}<\frac{\delta_k}{2}.$$

3) 如果 $e\subset E$ 及 $me<\delta_k$，則

$$\left|\int_e f_{n_k}(x)dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4}.$$

由此性質，得 $\delta_{k+1}<\frac{\delta_k}{2}$。因此

$$m(e_{k+1}+e_{k+2}+e_{k+3}+\cdots\cdots)<\frac{\delta_k}{2}+\frac{\delta_{k+1}}{2}+\frac{\delta_{k+2}}{2}+\cdots<\delta_k.$$

所以

$$\left|\int_{e_k(e_{k+1}+e_{k+2}+\cdots)} f_{n_k}(x)dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4}.$$

今導入新的集:

$$A_k=e_k-(e_{k+1}+e_{k+2}+\cdots),$$

則

$$\left|\int_{A_k} f_{n_k}(x)dx\right|\geqslant\frac{3}{4}\epsilon_0. \tag{11}$$

種種點集 $A_k$ 之間是兩兩不相交的(這也就是要導入 $A_k$ 的道理)，且 $A_k\subset e_k$。因此

$$m(A_{k+1}+A_{k+2}+\cdots\cdots)<\delta_k. \tag{12}$$

現在不難完成定理的證明。置 $k_1=1$ 而令 $k_2$ 是任何一個如下的足數 $m$:$m>1$,

$$\left|\int_{A_{k_1}} f_{n_m}(x)dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4}.$$

這種足數 $m$ 的存在，由條件(8)即可明白。又令 $k_3$ 是任何一個如下的足數 $m$:$m>k_2$,

$$\left|\int_{A_{k_1}+A_{k_2}} f_{n_m}(x)dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4}.$$

這樣的手續繼續進行，得到一列單調常增的數; $k_1<k_2<k_3<\cdots\cdots$,

$$\left|\int_{A_{k_1}+\cdots+A_{k_{i-1}}} f_{n_{k_i}}(x)dx\right|<\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{13}$$

另一方面，由不等式 (11)，

$$\left|\int_{A_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)dx\right| \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon_0. \tag{14}$$

最後，由 (12)乃得

$$m(A_{k_{i+1}}+A_{k_{i+2}}+A_{k_{i+3}}+\cdots)\leqslant m(A_{k_i+1}+A_{k_i+2}+\cdots)<\delta_{k_i},$$

因此

$$\left|\int_{A_{k_{i+1}}+A_{k_{i+2}}+\cdots\cdots} f_{n_{k_i}}(x)dx\right|<\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{15}$$

置 $Q=A_{k_1}+A_{k_2}+A_{k_3}+\cdots\cdots$，則

$$\int_Q f_{n_{k_i}}(x)dx=\int_{A_{k_1}+\cdots A_{k_{i-1}}} f_{n_{k_i}}(x)dx+\int_{A_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)dx+\int_{A_{k_{i+1}}+A_{k_{i+2}}+\cdots} f_{n_{k_i}}(x)dx,$$

將 (13),(14),(15) 諸關係式代入，乃得

$$\left|\int_Q f_{n_{k_i}}(x)dx\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{4} \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots).$$

但此式與(8)式矛盾。矛盾之由來是假定定理 2 不成立。因此定理證畢。

這個定理的複雜的證明方法常被用到，讀者應仔細地加以體會。

**系 1**　設在可測集 $E$ 上有 $(L)$ 可積函數列 $\{f_n(x)\}$ 與 $(L)$ 可積函數 $F(x)$。假如對於任意的可測集 $e\subset E$，成立着等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx=\int_e F(x)dx. \tag{16}$$

那末 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上有等度的絕對連續積分。

事實上，依照定理 3，$\{f_n(x)-F(x)\}$ 有等度的絕對連續積分，再由不等式

$$\left|\int_e f_n(x)dx\right| \leqslant \left|\int_e \{f_n(x)-F(x)\}dx\right| + \left|\int_e F(x)dx\right|$$

即得所要的結果。

系 2 設在可測集 $E$ 上定義着 $(L)$ 可積函數列 $\{f_n(x)\}$ 與 $(L)$ 可積函數 $F(x)$。假如對於任意的有界可測函數 $\varphi(x)$, 等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x)f_n(x)dx=\int_E \varphi(x)F(x)dx$$

成立,則 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上有等度的絕對連續積分。

事實上,特别取 $\varphi(x)$ 爲 $E$ 中可測子集的特徵函數,則問題歸結於系 1。這個系就是定理 2 的系的逆。

綜合上述,乃得如下的結果。

定理 4 (維他利) 設在可測集 $E$ 上有 $(L)$ 可積函數列 $\{f_n(x)\}$, 度量收斂於 $(L)$ 可積函數 $F(x)$。要使(16)式對於所有可測集 $e\subset E$ 成立,其必要且充分的條件是: $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上有等度的絕對連續積分。

所當注意的是:要 $\{f_n(x)\}$ 有等度的絕對連續積分必須(16)式對於所有 $E$ 中任一可測子集 $e$ 爲眞。僅僅乎從關係式

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E F(x)dx,$$

是不能得到 $\{f_n(x)\}$ 有等度的絕對連續積分的。例如在 $[0, 1]$ 上定義着如下的函數列 $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(0)=0$$

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \left(0<x\leqslant \frac{1}{2n}\right), \\ -n & \left(\frac{1}{2n}<x\leqslant\frac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n}<x\leqslant 1\right). \end{cases}$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0,$$

但是由於

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f_n(x)dx = \frac{1}{2},$$

等度的絕對連續性不能成立。

有興趣的是：對於符號不變的函數，事情要簡單得多。且看下面的定理。

**定理 5** 設在可測集 $E$ 上，有($L$)可積的正值函數列 $\{f_n(x)\}$，度量收斂於 $F(x)$。如果在集 $E$ 上 $F(x)$ 的積分等於 $f_n(x)$ 的積分之極限，那末在$E$的任何可測子集 [1]上 $F(x)$ 的積分也等於 $f_n(x)$ 的積分之極限。

此定理易從法都定理[2]（第六章§1)導出。事實上，假如定理不眞，那末存在着可測集 $A\subset E$ 使等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A F(x)dx$$

不成立。那末有如下的正數 $\sigma$，有無數個 $\int_A f_n(x)dx$ 超出區間

$$\left(\int_A Fdx-2\sigma,\ \int_A Fdx+2\sigma\right)$$

之外。

假如有無數個積分 $\int_A f_n(x)dx$ 小於 $\int_A F(x)dx-2\sigma$，那末不妨(以此子函數列當作討論的對象)假設

$$\int_A f_n(x)dx\leqslant\int_A F(x)dx-2\sigma$$

對於所有的 $n$ 成立，這是與法都定理相矛盾的。因此，必有無數個的 $n$ 使

$$\int_A f_n(x)dx\geqslant\int_A F(x)dx+2\sigma \tag{17}$$

成立，且不妨假設(17)式對於所有的 $n$ 成立。由假設，就 $E$ 上的積分而言，極限手續可以與

1) 上述例子表明沒有條件 $f_n(x)\geqslant 0$時定理不成立。

2) 精確的說，是從該定理的附註中導出的。

積分記號交換。所以,當 $n$ 適當大的時候,不等式

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E F(x)dx\right|<\sigma$$

成立,因此,不妨假設對於所有的 $n$ 成立。由是

$$\int_E f_n(x)dx<\int_E F(x)dx+\sigma.$$

置 $B=E-A$, 從上式減去 (17), 乃得

$$\int_B f_n(x)dx<\int_B F(x)dx-\sigma.$$

此事又與法都定理相抵觸。

定理證畢。

由此定理可以導出

**定理 6** (非赫秦戈里攵) 設在可測集 $E$ 上有($L$)可積函數列 $\{f_n(x)\}$, 度量收斂於($L$)可積函數 $F(x)$。那末要 (16) 式對於 $E$ 的任一可測子集 $e$ 都成立的必要且充分條件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx=\int_E |F(x)|dx. \tag{18}$$

事實上,如果 (18) 成立,則由定理 5, 知此等式對於任何可測子集 $e\subset E$ 成立。但當 $\{|f_n(x)|\}$ 有等度的絕對連續積分時,則 $\{f_n(x)\}$ 亦然。由是,(16)式對於所有可測子集 $e\subset E$ 是成立的。

其逆,如果(16)式對於所有可測子集 $e\subset E$ 成立,則 $\{f_n(x)\}$ 有等度的絕對連續積分,因此 (由本節定理 2 的證明) 可知 $\{|f_n(x)|\}$ 也有等度的絕對連續積分。應用定理 2 於 $\{|f_n(x)|\}$ 卽得所要的結果。

最後我們講一個定理,此定理是等度的絕對連續性的一個檢定法。

**定理 7** (瓦來-布桑) 設在可測集 $E$ 上有可測函數族 $M=\{f(x)\}$。假如有正值增加函數 $\Phi(u)(u\geqslant 0)$, $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi(u)=+\infty$, 並且對於 $M$ 中任何的函數 $f(x)$, 不等式

$$\int_E |f(x)|\cdot\Phi(|f(x)|)dx<A$$

成立，其中 $A$ 是一個與 $f(x)$ 無關的有限常數。那末 $f(x)$ 在 $E$ 上是 ($L$) 可積的，並且 $M=\{f(x)\}$ 具有等度的絕對連續的積分。

我們首先注意到複合函數 $\Phi(|f(x)|)$ 是一個可測函數[因爲當 $a>0$ 時，$\underset{u}{E}(\Phi(u)>a)$ 是區間 $(b,+\infty)$，所以 $E(\Phi(|f|)>a)=E(|f|>b)$]。今證定理如下：

對於正數 $\varepsilon$，有 $K$ 適合於

$$\frac{A}{\Phi(K)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定此 $K$。設 $e$ 是 $E$ 的可測子集。又設 $f(x)$ 是 $M$ 中的任一函數。置 $e_1=e(|f(x)|>K)$，$e_2=e(|f(x)|\leqslant K)$，則

$$\int_e |f(x)|\,dx=\int_{e_1}|f|\,dx+\int_{e_2}|f|\,dx\leqslant\frac{1}{\Phi(K)}\int_{e_1}|f(x)|\,\Phi(|f(x)|)\,dx+\int_{e_2}|f(x)|\,dx.$$

從而

$$\int_e |f(x)|\,dx\leqslant\frac{A}{\Phi(K)}+K\cdot me_2<\frac{\varepsilon}{2}+K\cdot me.$$

由此得着 $f(x)$ 的 ($L$) 可積性。置 $\delta=\frac{\varepsilon}{2K}$，則當 $me<\delta$ 時，

$$\int_e |f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

定理由是證畢。

例如 $M$ 是滿足不等式

$$\int_E f^2(x)dx<A$$

的 $f(x)$ 的全體，則 $M$ 有等度的絕對連續積分。

## 第五章與第六章的習題

1. 若 $f_n(x)\geqslant 0$ 且 $\int_E f_n(x)\,dx\to 0$，則必 $f_n(x)\Longrightarrow 0$，但是，$f_n(x)$ 不一定概收斂於 0。

2. 關係式

$$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx \to 0$$

與 $f_n(x) \Longrightarrow 0$ 是等價的。

3. 若 $a_n \to 0$，則有正值可測函數列 $\{u_n(x)\}$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_E u_n(x)dx < +\infty$，但 $\{u_n(x)\}$ 在 $E$ 中任何一點不收斂於 0。

4. 如果積分

$$\int_E \varphi(x)f(x)dx$$

對於任何 $(L)$ 可積函數 $f(x)$ 存在，則 $\varphi(x)$ 幾乎處處是有界（勒貝格）。

5. 設 $f(x)$ 是在集 $E$ 上定義的有限可測函數。設下列諸數

$$\cdots\cdots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots$$

適合 $y_k \to \infty$，$y_{-k} \to -\infty (k \to \infty)$，$0 < y_{k+1} - y_k < \lambda$。又置 $e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1})$，則函數 $f(x)$ 爲 $(L)$ 可積之必要且充分條件是：對於任何 $\{y_k\}$，級數 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k me_k$ 爲絕對收斂。

6. 在習題 5 的假定下，如果級數 $\sum y_k me_k$ 絕對收斂的話，那末級數的和當 $\lambda \to 0$ 時趨於 $\int_E f dx$。

7. 一致收斂的 $(R)$ 可積函數列，其極限函數亦爲 $(R)$ 可積。

8. 康脫的完全集 $P_0$ 的特徵函數是 $(R)$ 可積的。

9. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是 $E$ 上所定義的兩個可測正值函數。置 $E_y = E(g \geqslant y)$，$\Phi(y) = \int_{E_y} f(x)dx$，則

$$\int_E f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} \Phi(y)dy.$$

（法捷耶夫）

10. 設在區間上有 $n$ 個可測集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$。如果 $[0,1]$ 中每一個點至少屬於上

述 $n$ 個集中的 $q$ 個集,則 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中至少有一集具有測度 $\geqslant \frac{q}{n}$。(康脫洛維奇)

11. 設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定義的 $(L)$ 可積函數。又設 $\alpha$ 是一如下的常數: $0<\alpha<b-a$。如果對於每一個測度爲 $\alpha$ 的集 $e$, 有關係 $\int_e f(x)dx=0$, 則 $f(x)\sim 0$。(卡扶林)

12. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲 $(L)$ 可積而在 $[a,b]$ 之外等於 0。設

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt,$$

則 $\int_a^b |\varphi(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$ (柯爾莫廓洛夫)

13. 設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上定義的 $(L)$ 可積函數。如果對於 $[a,b]$ 中任意的 $c$ 是 $\int_a^c f(x)dx=0$ 的話,那末 $f(x)\sim 0$。

14. 設在 $[a,b]$ 上,已給可積函數 $f(x)>0$。設 $0<q\leqslant b-a$, $e\subset[a,b]$, $me\geqslant q$, $S$ 爲所有這種可測子集的全體。證明

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}>0.$$

15. 設 $M=\{f(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上爲 $(L)$ 可積的函數族。如果 $M$ 有等度的絕對連續積分,那末存在着如下的單調增加的正函數 $\Phi(u)(u\geqslant 0)$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\Phi(u)=+\infty$, 且

$$\int_a^b |f(x)|\Phi(|f(x)|)dx\leqslant A<+\infty$$

對於 $M$ 中任何函數 $f(x)$ 成立,其中 $A$ 是一個與 $f(x)$ 無關的數。(瓦來-布桑)

# 第七章　本身及其平方都是(L)可積的函數

## §1　主要定義、不等式、模數

本章討論一類很重要的$(L)$可積函數：就是平方也是$(L)$可積的函數。爲簡單起見，假定所論的函數都是在$E=[a,b]$上定義的。

**定義**　可測函數$f(x)$滿足

$$\int_a^b f^2(x)dx<+\infty$$

時，稱$f(x)$是一個平方爲$(L)$可積的函數。

平方爲$(L)$可積的函數的全體記作$L_2$。

**定理 1**　$L_2$中的函數必屬於$L$。

從不等式

$$|f(x)|\leqslant\frac{1+f^2(x)}{2}$$

即知定理成立。

又由不等式

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

得下面的定理。

**定理 2**　$L_2$中兩個函數之積是一$(L)$可積函數。

由此，從等式

$$(f\pm g)^2=f^2\pm 2fg+g^2$$

得着

**定理 3** $L_2$ 中兩個函數之和與差都屬於 $L_2$

最後，我們注意到下面的事實：設 $k$ 是一有限常數。當 $f(x)\in L_2$ 時，$kf(x)$ 亦屬於 $L_2$。

**定理 4**（布涅可夫斯基不等式） 如果 $f(x)\in L_2, g(x)\in L_2$，則

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]. \qquad (1)$$

**證明** 設二次三項式

$$\psi(u)=Au^2+2Bu+C$$

的係數 $A,B,C$ 都是實數且 $A>0$。假如 $\psi(u)\geqslant 0$ 常成立，則必

$$B^2\leqslant AC. \qquad (2)$$

事實上，不然的話，發生矛盾：

$$\psi\left(-\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{A}(AC-B^2)<0.$$

注意此事以後，置

$$\psi(u)=\int_a^b[uf(x)+g(x)]^2dx=u^2\int_a^b f^2dx+2u\int_a^b fgdx+\int_a^b g^2dx.$$

則因 $\psi(u)\geqslant 0$，從(2)式得着(1)式。

**系** 如果 $f(x)\in L_2$，則

$$\int_a^b |f(x)|dx\leqslant\sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \qquad (3)$$

事實上，於(1)式置 $g(x)=1$，又將 $f(x)$ 換以 $|f(x)|$ 即得(3)。

**定理 5**（柯西不等式） 如果 $f(x)\in L_2, g(x)\in L_2$，則

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}\ .$$

**證明** 將布涅可夫斯基不等式的兩邊開方，乃得

$$\int_a^b fg\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2\,dx}\ .$$

將上不等式乘 2 後，兩邊各加

$$\int_a^b f^2\,dx + \int_a^b g^2\,dx,$$

乃得

$$\int_a^b (f+g)^2\,dx \leqslant \left(\sqrt{\int_a^b f^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2\,dx}\right)^2,$$

由此即得定理。

從柯西不等式，我們對於 $L_2$ 中的函數有一種新的觀點來討論。申言之，如果我們對於每一個函數 $f(x)\in L_2$，令數

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

與之對應，那末這些數具有下列諸性質：

I. $\|f\|\geqslant 0$，當 $f\sim 0$ 且僅當此時 $\|f\|=0$.

II. $\|kf\|=|k|\cdot\|f\|$，特別是：$\|-f\|=\|f\|$.

III. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

稱 $\|f\|$ 爲 $f$ 的模數。顯然的，$\|f\|$ 與實數（或複數）$x$ 的絕對值 $|x|$

頗有相似之處。此相似點是一系列重要且美麗的學說的起源。

一般的說，解析學是利用兩數之差的絕對值來定兩點間之距離的：

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

對於 $L_2$, 我們把 $L_2$ 看作一個"空間", $L_2$ 中任何兩個函數 $f$ 和 $g$ 規定正數(或 0)

$$\rho(f,g)=\|f-g\|$$

爲 $f$ 與 $g$ 的距離。

將對等的函數看作是相等的函數，則距離 $\rho(f,g)$ 具有如下的性質：

1) $\rho(f,g)\geqslant 0$, 當 $f=g$ 時且僅當此時，$\rho(f,g)=0$.

2) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$.

3) $\rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(h,g)$.

對於集 $A$, 其中任何一對元素 $x$ 與 $y$ 有具有上述諸性質的函數 $\rho(x,y)$ 的話，稱 $A$ 是一剛性空間或計量空間。

顯然的，$L_2$ 是計量空間。這種觀點最初是希爾貝脫想出的，因此亦稱 $L_2$ 爲希爾貝脫空間。

## § 2　平均收斂

利用模數的概念，在希爾貝脫空間中可以導入極限的概念。這種極限的表達形式，與通常的極限很相類似。

**定義 1**　設 $f_1,f_2,f_3,\cdots\cdots$ 和 $f$ 都是 $L_2$ 中的函數。如果對於任意的正數 $\varepsilon$, 有 $N$, 當 $n>N$ 時，不等式

$$\|f_n-f\|<\varepsilon$$

成立，稱 $f$ 是 $\{f_n\}$ 的極限，這時也可說 $\{f_n\}$ 收斂於 $f$, 或 $f_n$ 趨近於 $f$。記號是

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f,\text{或} f_n\to f.$$

此處,我們必須提醒讀者注意:下面二個式子

$$f_n(x)\to f(x) \text{ 和 } f_n\to f$$

是有深刻的區別的。第一個式子表明:對於固定的 $x$, 數列 $\{f_n(x)\}$ 是依照通常的意義收斂於 $f(x)$ 的。第二個式子,依照定義 1, 表明 $L_2$ 中可列個元素收斂於一個元素 $f$。用通常函數論的話來說,$f_n\to f(f\in L_2)$ 的意思就是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx=0.$$

這種收斂的方式稱為函數列 $\{f_n(x)\}$ 平均收斂於 $f(x)$。

**定理 1** 假如函數 $\{f_n(x)\}$ 平均的收斂於 $f(x)$, 那末 $\{f_n(x)\}$ 度量收斂於 $f(x)$。

**證明** 設 $\sigma>0$。置

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-f|\geqslant\sigma).$$

則

$$\int_a^b (f_n-f)^2dx\geqslant\int_{A_n(\sigma)}(f_n-f)^2dx\geqslant\sigma^2\cdot mA_n(\sigma).$$

因為 $\sigma$ 是固定的,因此

$$mA_n(\sigma)\to 0.$$

所以 $f_n\Longrightarrow f$。

系 如果函數列 $\{f_n(x)\}$ 平均收斂於 $f(x)$, 則必有一子函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 概收斂於 $f(x)$。

此系從定理 1 和第四章 § 3 的黎斯定理可以明白。但是我們也可

以直接證明，從假設

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n-f)^2dx=0,$$

必有如下的 $\{n_k\}$： $n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$,

$$\int_a^b (f_{n_k}-f)^2dx<\frac{1}{2^k}.$$

因此，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b (f_{n_k}-f)^2dx$$

是收斂的。由第六章§1的定理11，知在 $[a,b]$ 中，關係

$$f_{n_k}(x)\to f(x)$$

幾乎處處成立。

可注意的是，從 $f_n(x)$ 的平均收斂於 $f(x)$ 不能導出 $f_n(x)$ 的概收斂於 $f(x)$。此事由第四章§3的例可以明白。

另一方面，即使 $f_n(x)\to f(x)$ 在 $[a,b]$ 上處處成立，不能得到 $f_n(x)$ 平均收斂於 $f(x)$ 的結論。

**例**　設在 $[0,1]$ 上有如下的一列函數 $\{f_n(x)\}$：

$$\text{當 } 0<x<\frac{1}{n} \text{ 時，} f_n(x)=n,$$

$$\text{在 } [0,1] \text{ 中其他的點，} f_n(x)=0,$$

那末顯然的，對於 $x\in[0,1]$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

但是，

$$\int_0^1 f_n^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n \to +\infty.$$

**定理 2**（極限的惟一性） $L_2$ 中的函數列 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots$ 只能有一個極限。

**證明** 假如

$$f_n \to f; \ f_n \to g,$$

則

$$\|f-g\| \leqslant \|f-f_n\| + \|f_n-g\|.$$

不等式的右方收斂於 0，故必

$$\|f-g\| = 0.$$

從而 $f-g=0$ 或 $f=g$。定理證畢。

此定理亦可用他法證明：如果 $f_n \to f$，$f_n \to g$，則 $\{f_n(x)\}$ 同時度量收斂於 $f(x)$，亦度量收斂於 $g(x)$，因此 $f(x) \sim g(x)$。它們在 $L_2$ 中可以看作同一個元素。

**定理 3**（模數的連續性） 若 $f_n \to f$，則 $\|f_n\| \to \|f\|$。

**證明** 從下面的不等式

$$\|f_n\| \leqslant \|f\| + \|f_n - f\|,$$

$$\|f\| \leqslant \|f_n\| + \|f_n - f\|$$

卽得

$$\|f_n\| - \|f\| \leqslant \|f_n - f\|.$$

從而定理得證。

**系** 收斂函數列 $\{f_n\}$ 的模數是有界的。

**定義 2** 設 $\{f_n\}$ 是 $L_2$ 中的一函數列，如果對於任一正數 $\varepsilon$，有如下的 $N$：當 $n>N$，$m>N$ 時，

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$$

成立，那末說：$\{f_n\}$ 是本來收斂的

**定理 4**　假如 $\{f_n\}$ 有極限，那末 $\{f_n\}$ 是本來收斂的。

**證明**　設

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f.$$

對於正數 $\varepsilon$，有 $N$：當 $n>N$ 時，

$$\|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，當 $m>N$, $n>N$ 時，成立着

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f-f_m\|<\varepsilon.$$

定理由是證畢。

上述定理之逆亦眞：

**定理 5**　假如 $\{f_n\}$ 是本來收斂的，那末 $\{f_n\}$ 必有極限。

**證明**　取收斂級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$，對於每一個 $k$ 取 $n_k$ 使得當 $n\geqslant n_k$，$m\geqslant n_k$ 時，

$$\|f_n-f_m\|<\frac{1}{2^k}$$

成立。

不妨假設　$n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$，

於是

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<+\infty.$$

由§1的不等式(3),得

$$\int_a^b|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|dx\leqslant\sqrt{b-a}\,\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|.$$

因此,級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|dx$$

也是收斂的。由第六章§1的定理11,級數

$$|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

是概收斂的。因此,級數

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\}$$

也是概收斂的,這就是說:極限

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$$

幾乎處處存在(爲有限數)。

今引入函數$f(x)$:當$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$存在爲有限數時,即令$f(x)$等於此數,在其他的點則令$f(x)$等於0。函數$f(x)$顯然的是一可測函數,並且幾乎對於$[a,b]$中所有的點,

$$f_{n_k}(x)\to f(x).$$

我們還要證明:此函數$f(x)$屬於希爾貝脫空間,並且是$\{f_n\}$的極

限。

爲此目的，對於任意的正數 $\varepsilon$，取如下的 $N$：當 $n>N, m>N$ 時，

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon.$$

取 $k_0$ 甚大使 $n_{k_0}>N$。那末對於任意的 $n>N$ 和任意的 $k>k_0$，

$$\int_a^b (f_n-f_{n_k})^2dx<\varepsilon^2,$$

應用法都定理於函數列 $\{(f_n-f_{n_k})^2\}\ (k>k_0)$，乃得

$$\int_a^b (f_n-f)^2dx\leqslant\varepsilon^2.$$

(此地，從 $f_n-f\in L_2$，得到 $f\in L_2$。)

卽當 $n>N$ 時，

$$\|f_n-f\|<\varepsilon.$$

於是定理證畢。

本定理中所述希爾貝脫空間的性質，稱爲空間的完備性。讀者可以看到，此地的定理 4 和定理 5，與有名的波爾釆諾柯西的收斂條件是相似的。波爾釆諾柯西的收斂條件是數軸 $Z$ 的連續性的多種表示形式中的一個。此性質可以由下面幾個命題中的任何一個表達出來：

A. 如果將直線軸上的點分成 $X$ 和 $Y$ 兩部分，使 $X$ 中的任何點位於 $Y$ 中任何一個點之左，那末或是 $X$ 有最右點或是 $Y$ 有最左點。

B. 有上界的集必有它的上確界。

C. 有上界的單調增加的變數必有有限的極限。

D. 如果 $\{d_n\}$ 是一列前者含有後者的閉區間。若其邊長收斂於 0，則必有一點含在所有的 $d_n$ 中。

E. 波爾釆諾柯西判別法：本來收斂的數列 $\{x_n\}$ 必有有限的極限。

如果從 $Z$ 除去一點,則上述諸定理不復成立。

在定理 A, B, C, D, E 中只有最後一個 E, 是沒有用到直線上點的次序概念。因此,在較數軸更複雜的空間中也可以用類似於 E 的判別法來說明空間的連續性。

**定義 3** 設 $A$ 是空間 $L_2$ 中的一點集。假如 $L_2$ 中任意一點是 $A$ 中某點列的極限,則稱 $A$ 在 $L_2$ 中是處處稠密的。

用汎函數論中的述語來說: 對於函數類 $A\subset L_2$, 如果 $L_2$ 中任意一個函數是 $A$ 中某函數列 (依照平均收斂的意義) 的極限,則稱 $A$ 在 $L_2$ 中處處稠密。

容易看到,要 $A=\{g\}$ 在 $L_2$ 中處處稠密的必要且充分條件是: 對於任意的 $f\in L_2$ 和任意的正數 $\varepsilon$, 在 $A$ 中有 $g$ 適合

$$\|f-g\|<\varepsilon.$$

**定理 6** 下列函數類:

$M$——有界可測函數類

$C$——連續函數類

$P$——多項式類

$S$——梯形函數類

中任何一類在 $L_2$ 中是處處稠密的。如果函數的定義範圍 $[a, b]$ 是 $[-\pi, \pi]$, 則還有

$T$——三角函數類

在 $L_2$ 中也是處處稠密的。

**證明** 1) 設 $f(x)\in L_2$。對於任一正數 $\varepsilon$ (由積分之絕對連續性), 有 $\delta>0$, 當

$$e\subset[a, b],\ me<\delta$$

時,可使

$$\int_e f^2(x)dx<\varepsilon^2.$$

由第四章 § 4 的定理 1，對於這個 $\delta$，可以找到有界可測函數 $g(x)$ 使

$$mE(f\neq g)<\delta,$$

並且不妨假定在點集 $E(f\neq g)$ 上 $g(x)=0$。那末

$$\|f-g\|^2=\int_a^b (f-g)^2dx=\int_{E(f\neq g)}(f-g)^2dx=\int_{E(f\neq g)}f^2dx<\varepsilon^2,$$

即

$$\|f-g\|<\varepsilon.$$

因此定理對於$M$的證明已畢。

2) 設 $f(x)\in L_2$，$\varepsilon>0$。取函數 $g(x)\in M$ 使

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

設 $|g(x)|\leqslant K$。由盧洵定理，有連續函數 $\varphi(x)$ 適合

$$mE(g\neq\varphi)<\frac{\varepsilon^2}{16K^2},\ |\varphi(x)|\leqslant K.$$

這樣，

$$\|g-\varphi\|^2=\int_a^b (g-\varphi)^2dx=\int_{E(g\neq\varphi)}(g-\varphi)^2dx\leqslant 4K^2\cdot mE(g\neq\varphi)<\frac{\varepsilon^2}{4},$$

因之，

$$\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

於是

$$\|f-\varphi\|<\varepsilon.$$

因此定理對於$C$的證明已經完成。

3) 設 $f(x)\in L_2$, $\varepsilon>0$。取 $\varphi(x)\in C$ 使

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

然後由伐爾斯脫勞司定理，有如下的多項式 $P(x)$:

$$|\varphi(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

因此，

$$\|\varphi-P\|^2=\int_a^b(\varphi-P)^2dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon^2}{4},$$

從而

$$\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

於是

$$\|f-P\|<\varepsilon.$$

因此定理對於$P$的證明已成。

4) 設 $f(x)\in L_2$, $\varepsilon>0$。取 $\varphi(x)\in C$ 使

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因為 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續的，所以將 $[a,b]$ 用適當的點

$$c_0=a<c_1<c_2<\cdots<c_n=b$$

劃分為若干部分，使 $\varphi(x)$ 在每一個部分上的振幅小於 $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$。然後

引入如下的梯形函數:

$$s(x)=\varphi(c_k) \qquad (c_k\leqslant x<c_{k+1};\ k=0,1,\cdots,n-2),$$

$$s(x)=\varphi(c_{n-1}) \qquad (c_{n-1}\leqslant x\leqslant b),$$

則在 $[a,b]$ 上所有的點，$|s(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$。因此

$$\|s-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

從而

$$\|f-s\|<\varepsilon.$$

因此定理對於 $S$ 是眞的

5) 最後，設 $[a,b]=[-\pi,\pi]$, $f(x)\in L_2$。

對於任一正數 $\varepsilon$, 必有連續函數 $\varphi(x)$ 適合

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

設

$$|\varphi(x)|\leqslant K.$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上作如下的連續函數 $\psi(x)$:

當 $x\in[-\pi+\delta,\pi]$ 時，$\psi(x)=\varphi(x)$,

$\psi(-\pi)=\varphi(\pi)$

而在 $[-\pi,-\pi+\delta]$ 上則取 $\psi(x)$ 爲線性函數。但是假定

$$0<\delta<\frac{\varepsilon^2}{64K^2}.$$

函數 $\psi(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是連續的，並且是週期的:

$$\psi(-\pi)=\psi(\pi).$$

顯然，$|\psi(x)|\leqslant K$。因此

$$\|\varphi-\psi\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi-\psi)^2dx=\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}(\varphi-\psi)^2dx\leqslant 4K^2\delta<\frac{\varepsilon^2}{16},$$

從而

$$\|f-\psi\|<\frac{3\varepsilon}{4}.$$

由伐爾斯脫勞司定理(注意 $\psi(x)$是週期的!),有三角多項式 $T(x)$ 適合

$$|\psi(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

因此

$$\|\psi-T\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\psi-T)^2dx<\frac{\varepsilon^2}{16},$$

所以

$$\|f-T\|<\varepsilon.$$

於是定理完全證畢。

在許多問題中，函數列的弱性收斂,也起到很重要的作用。

**定義 4** 對於 $L_2$ 中的函數列 $f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots$,假如有 $f(x)\in L_2$ 使關係

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)f_n(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx$$

對於 $L_2$ 中任一函數 $g(x)$ 成立,則稱 $\{f_n(x)\}$ 弱性收斂於 $f(x)$。

對於弱性收斂我們只介紹下面的定理:

**定理 7** 若函數列 $\{f_n(x)\}$ 平均收斂於 $f(x)$, 則 $\{f_n(x)\}$ 必弱性收斂於 $f(x)$。

**證明** 設 $g(x)\in L_2$。則由布涅可夫斯基不等式,

$$\left|\int_a^b g(x)[f_n(x)-f(x)]\,dx\right|^2 \leqslant$$

$$\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]\cdot\left[\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx\right],$$

從而

$$\left|\int_a^b gf_n dx-\int_a^b gf\,dx\right| \leqslant \|g\|\cdot\|f_n-f\|\to 0.$$

這就是所要證明的結果。

## § 3　直交系

**定義 1**　兩個在 $[a, b]$ 上定義的函數 $f(x),g(x)$，如果滿足關係

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0,$$

則稱 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互相直交。

**定義 2**　在 $[a, b]$ 上定義的函數 $f(x)$ 如果滿足

$$\int_a^b f^2(x)dx=1,$$

則稱 $f(x)$ 是就範的。

**定義 3**　對於在 $[a, b]$ 上定義的函數系 $\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x),\cdots\cdots,$ 如果每一個函數是就範的，任何二個是直交的，則稱此函數系是一就範的直交系。

換言之，如果 $\{\omega_k(x)\}$ 具有條件

$$\int_a^b \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

則 $\{\omega_k(x)\}$ 是一就範的直交系。顯然的，就範直交系中任一函數都屬於 $L_2$。

例如三角函數系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\cdots, \tag{1}$$

看作在 $[-\pi, \pi]$ 上定義時，成一就範直交系。

設 $L_2$ 中的函數 $f(x)$ 是就範直交系中函數的一線性結合：

$$f(x) = c_1\omega_1(x) + c_2\omega_2(x) + \cdots + c_n\omega_n(x),$$

則於兩邊乘上 $\omega_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，然後積分乃得

$$c_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx.$$

所以係數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是完全惟一的決定的。特別，當

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

時，

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)dx, \ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx \, dx.$$

對於三角函數系，這些公式是富理埃發現的。因此有如下的一般定義。

**定義 4**　設 $\{\omega_k(x)\}$ 是一就範的直交系，$f(x)$ 是 $L_2$ 中之一函數。稱

$$c_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx$$

爲 $f(x)$ 關於 $\{\omega_k(x)\}$ 的富理埃係數。

級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x)$$

稱爲 $f(x)$ 關於 $\{\omega_k(x)\}$ 的富理埃級數。

現在我們來觀察一下，在希爾貝脫空間中函數 $f(x)$ 與 $f(x)$ 之富理埃級數的部分和之接近程度如何。就是說，設

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x),$$

我們要估計

$$\|f - S_n\|.$$

爲此目的，我們首先計算下面兩個積分：

$$\int_a^b f(x)S_n(x)dx, \int_a^b S_n^2(x)dx.$$

我們得到

$$\int_a^b f(x)S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

同樣可得到

$$\int_a^b S_n^2(x)dx = \sum_{i,k} c_i c_k \int_a^b \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{2}$$

因此

$$\|f-S_n\|^2 = \int_a^b (f^2-2fS_n+S_n^2)dx = \int_a^b f^2dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

或是

$$\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{3}$$

通稱(3)爲貝賽爾的等式。因爲左邊不是負的，所以

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

這是貝賽爾的不等式。

但是此地的 $n$ 是任意的，因此貝賽爾不等式可以加强爲

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{4}$$

特別，當等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \tag{5}$$

成立的時候，則稱此等式爲封閉公式。它有非常簡單的意義，就是：利用貝賽爾等式(3)，封閉公式可以改寫爲

$$\lim_{n\to\infty} \|f-S_n\| = 0.$$

換句話說，封閉公式表示：$f(x)$ 的富理埃級數的部分和 $S_n(x)$ 收

斂於(依照 $L_2$ 中的收斂意義，或稱平均收斂) $f(x)$。

**定義 5**　設 $\{\omega_k(x)\}$ 是一就範直交系。假如此系對於 $L_2$ 中的任一函數能使封閉公式成立，則稱 $\{\omega_k(x)\}$ 是一封閉系。

**定理 1**　假如 $\{\omega_k(x)\}$ 是一封閉系，那末對於 $L_2$ 中任何一對函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

成立，其中

$$a_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx,\ b_k = \int_a^b g(x)\omega_k(x)dx.$$

**證明**　函數 $f(x)+g(x)$ 的富理埃係數是 $a_k+b_k$，所以

$$\|f+g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2,$$

從而得到

$$\int_a^b f^2\,dx + 2\int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

由是卽得所要的等式。

定理 1 中的等式稱爲一般的封閉公式。

**系**　設 $\{\omega_k(x)\}$ 是一封閉系。設 $f(x)\in L_2$，$f(x)$ 關於 $\{\omega_k(x)\}$ 的富理埃級數是 $\Sigma c_k\omega_k(x)$，則等式

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \omega_k(x)dx$$

對於 $[a,b]$ 中任何可測集$E$成立。

事實上，設 $g(x)$ 是$E$的特徵函數，則 $g(x)$ 的平方是 $(L)$ 可積的，所以問題歸結於一般的封閉公式。

可以注意的是：$f(x)$ 的富理埃級數$\sum c_k\omega_k(x)$ 可以處處不收斂於 $f(x)$。

**定理 2**（司捷克洛夫） 設函數族 $A$ 在 $L_2$ 中是處處稠密的。假如 $\{\omega_k(x)\}$ 對於 $A$ 中任一函數能使封閉公式成立，那末 $\{\omega_k(x)\}$ 是一封閉系。

**證明** 設 $f(x)\in L_2$, $f(x)$ 的富理埃級數是 $\sum c_k\omega_k(x)$。置

$$S_n(f)=\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x).$$

那末，

1) $S_n(kf)=kS_n(f)$,

2) $S_n(f_1+f_2)=S_n(f_1)+S_n(f_2)$,

3) $\|S_n(f)\|\leqslant\|f\|$.

最初兩式是很明顯的。第三式由(2)及貝賽爾不等式即得：

$$\|S_n\|^2=\sum_{k=1}^{n} c_k^2\leqslant\|f\|^2.$$

注意到這些事情以後，取 $L_2$ 中的任意函數 $f(x)$。對於任意的正數 $\varepsilon$, 因爲 $A$ 在 $L_2$ 中處處稠密，必有函數 $g(x)\in A$ 適合

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

但是

$$\|f-S_n(f)\|\leqslant\|f-g\|+\|g-S_n(g)\|+\|S_n(g)-S_n(f)\|,$$

並且

$$\|S_n(g)-S_n(f)\|=\|S_n(g-f)\|\leqslant\|g-f\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

所以

$$\|f-S_n(f)\|<\frac{2}{3}\varepsilon+\|g-S_n(g)\|.$$

對於 $g(x)$，封閉公式是成立的，所以有如下的 $n_0$：當 $n>n_0$ 時，

$$\|g-S_n(g)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，不等式

$$\|f-S_n(f)\|<\varepsilon$$

當 $n>n_0$ 時成立。定理證畢。

**系 1**　如果封閉公式對於一切函數 $1, x, x^2, x^3,\cdots\cdots$ 都成立，則 $\{\omega_k(x)\}$ 必是一封閉系。

事實上，對於任一多項式

$$P(x)=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_mx^m,$$

成立着等式

$$S_n(P)=A_0S_n(1)+A_1S_n(x)+\cdots\cdots+A_mS_n(x^m),$$

因此

$$\|P-S_n(P)\|\leqslant\sum_{k=0}^{m}|A_k|\cdot\|x^k-S_n(x^k)\|.$$

上式的右方當 $n\to\infty$ 時接近於 0。所以封閉公式對於一切多項式是成立的。但是多項式在 $L_2$ 中是處處稠密的，因此證明白 $\{\omega_k(x)\}$ 的封閉性。

然則封閉系是存在的麼？下面，司捷克洛夫的定理（系 2）給以肯定的回答。

**系 2** 三角函數系(1)是封閉的。

事實上，只要證明完備公式對於一切三角多項式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

成立就够了。因爲 $T(x)$ 是系(1)中函數的線性結合，所以所要的事是很顯然的。

**定理 3**（黎斯—菲蕭） 設 $\{\omega_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的一個就範直交系。假如數列 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots$ 滿足

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<+\infty,$$

那末存在着如下的函數 $f(x)\in L_2$:

1) $c_k$ 是 $f(x)$ 的富理埃係數，

2) $f(x)$ 滿足封閉公式：$\sum c_k^2=\|f\|^2$.

**證明** 置

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\omega_k(x),$$

則當 $m>n$ 時，

$$\|S_m-S_n\|^2=\int_a^b\Big[\sum_{k=n+1}^{m}c_k\omega_k(x)\Big]^2dx=$$

$$=\sum_{i,k}c_ic_k\int_a^b\omega_i(x)\omega_k(x)dx=\sum_{k=n+1}^{m}c_k^2.$$

設 $\varepsilon$ 是一正數，則有 $N$ 如下：當 $m>n>N$ 時，

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 < \varepsilon^2.$$

因之，

$$\|S_m - S_n\| < \varepsilon.$$

此即表示$\{S_n\}$是本來收斂的。

由於 $L_2$ 的完備性，存在着如下的函數 $f(x) \in L_2$:

$$\|S_n - f\| \to 0.$$

這樣所得的函數$f(x)$ 就是所要的函數。事實上，從 § 2 的定理 7，函數列 $\{S_n(x)\}$ 弱性收斂於$f(x)$。對於任意的 $g(x) \in L_2$, 等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

成立。特別令

$$g(x) = \omega_i(x),$$

乃得

$$\int_a^b f(x)\omega_i(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\omega_i(x)dx.$$

但當 $n > i$ 時，

$$\int_a^b S_n(x)\omega_i(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x)\right]\omega_i(x)dx = c_i.$$

從而得到

$$\int_a^b f(x)\omega_i(x)dx = c_i,$$

因此$f(x)$ 滿足所要的第一個性質。

在這個情形下，$S_n(x)$ 乃為 $f(x)$ 的富理埃級數的部分和，且關係式

$$\|S_n - f\| \to 0$$

成立。因而封閉公式對於 $f(x)$ 成立。定理證畢。

**注意** 滿足黎斯-菲蕭定理的函數只有一個。

事實上，如果有兩個函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都有此性質，那末由第一個條件，$f(x)$ 與 $g(x)$ 有共同的富理埃係數。再由第二個條件乃得

$$S_n \to f, \quad S_n \to g,$$

從而得到 $f = g$。

有興趣的事是：如果將定理中的第二個條件除去，那末是否還保持着注意中所述的性質呢？為了要回答這個問題，首先建立下面的定義：

**定義 6** 設 $\{\varphi_k(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上屬於 $L_2$ 的函數系。如果 $L_2$ 中，除零函數（意即幾乎處處為 0 的函數）而外，沒有函數與所有的 $\varphi_k(x)$ 成直交，則稱 $\{\varphi_k(x)\}$ 是一完全系。

在此定義中並不需要假定 $\{\varphi_k(x)\}$ 是一就範直交系。

我們現在要證明：滿足黎斯-菲蕭定理中第一個條件的函數為唯一的必要且充分條件是：原來的就範直交系 $\{\omega_k(x)\}$ 具有完全性。

事實上，假如 $\{\omega_k(x)\}$ 是完全的話，那末當 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的富理埃係數

$$\int_a^b f(x)\omega_k(x)dx = \int_a^b g(x)\omega_k(x)dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

時，$f(x) - g(x)$ 乃與所有的 $\omega_k(x)$ 為直交，因此 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相同。

其逆，如果函數系是不完全的，那末存在着不同於零的函數 $h(x)$，

$h(x)$ 與函數系中任意函數爲直交。由是,若函數 $f(x)$ 滿足第一個條件,則不同於 $f(x)$ 的函數 $f(x)+h(x)$ 也滿足第一個條件。

對於就範直交系而言,封閉性與完全性是一致的。

**定理4**　就範直交系 $\{\omega_k(x)\}$ 爲完全的必要且充分條件是:$\{\omega_k(x)\}$ 是封閉的。

**證明**　設 $\{\omega_k(x)\}$ 是封閉的。如果函數 $f(x)\in L_2$, $f(x)$ 與函數系中所有函數直交,則 $f(x)$ 的富理埃係數均爲 0。

因此封閉公式卽爲

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=0,$$

從而得到 $f(x)$ 爲零函數。是卽表示 $\{\omega_k(x)\}$ 爲完全的。

其逆,設 $\{\omega_k(x)\}$ 爲完全的,假使說有函數 $g(x)\in L_2$ 而不滿足封閉公式,則必須成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<\|g\|^2,$$

其中

$$c_k=\int_a^b g(x)\omega_k(x)dx$$

是 $g(x)$ 的富理埃級數。由黎斯-菲蕭定理,存在着如下的函數 $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\omega_k(x)dx=c_k,\quad \|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

但是函數 $f(x)-g(x)$ 與系中一切函數是直交的。又 $\{\omega_k(x)\}$ 是一完全系,所以等式

$$f(x)=g(x)$$

成立。此事與條件

$$\|f\|<\|g\|$$

不能相容，定理因此證畢。

**系** 三角函數系(1)在$[-\pi, \pi]$上是完全的。

最後我們要討論與就範直交系有關的一個問題。

設 $\{\omega_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上就範的直交系。又設級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{6}$$

是收斂的。那末由黎斯-非蕭的定理，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x) \tag{7}$$

是 $L_2$ 中某一函數 $f(x)$ 的富理埃級數，其部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x)$$

平均收斂於 $f(x)$。因此，有子函數列 $\{Sn_i(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上概收斂於 $f(x)$。可以證明足數 $n_i$ 的選擇，是與直交系 $\{\omega_k(x)\}$ 沒有關係，只要用到(6)就夠了。關於這個問題，現代有許多研究。我們引入與此有關的最簡單的結果如下。

**定理 5**（卡契馬司）。設

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2.$$

如果足數 $n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$ 使

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{n_i}<+\infty, \tag{K}$$

則函數列 $\{Sn_i(x)\}$ 幾乎處處收斂。

**證明** 假設 $f(x)$ 是滿足黎斯-非蕭定理中兩個條件的函數，則由貝賽爾等式，

$$\|S_{n-1}-f\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n-1}c_k^2=r_n.$$

由條件$(K)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b(S_{n_i-1}-f)^2dx<+\infty,$$

所以由第六章§1的定理11，在$[a,b]$上$S_{n_i-1}(x)$概收斂於$f(x)$。

另一方面，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b[c_k\omega_k(x)]^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<+\infty,$$

所以仍由第六章§1的定理11，在$[a,b]$上關係

$$c_{n_i}\omega_{n_i}(x)\to 0$$

幾乎處處成立。從而得到

$$S_{n_i}(x)\to f(x).$$

此卽所要證明的結果。

**定理6**(拉特馬赫) 設$\psi(k)$是單調增加的正函數，當$k$趨近於$+\infty$時函數$\psi(k)\to+\infty$。若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)c_k^2<+\infty,\tag{8}$$

又足數列$n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$滿足

$$\psi(n_i)\geqslant i,\tag{R}$$

則函數列$\{S_{n_i}(x)\}$幾乎處處收斂。

**證明** 我們將證明下面的事實：當數列$n_i$滿足$(R)$時，一定也滿足$(K)$。從而卽得定理的證明。爲此目的，我們將條件(8)改寫爲

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\psi(k)c_k^2<+\infty.\tag{9}$$

而由$(R)$乃得

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} c_k^2 < +\infty. \tag{10}$$

那末,將二重級數

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} c_k^2 + \sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2 + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots\cdots\cdots \\ \qquad + \sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2 + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad + \sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2 + \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{11}$$

行行相加的級數是收斂的。因此,將此二重級數列列相加亦爲收斂,因爲第 $i$ 列的和是 $r_{n_i}$。所以條件($K$)成立。定理證畢。

**注意** 條件 ($K$) 與 ($R$) 是等價的。事實上,我們已經從 ($R$) 導出 ($K$)。今證其逆: 設 $n_i$ 滿足 ($K$)。那末,將(11)列列相加,得一有限的和。將(11)行行相加,即得條件 (10)。如果置

$$\psi(k)=i \qquad (n_i \leqslant k < n_{i+1};\ i=1,\ 2,\cdots\cdots),$$

則(10)式可以寫爲(9)式或(8)式。顯然的,$\psi(k)$ 滿足拉特馬赫定理中的條件,而 $n_i$ 滿足 ($R$)。

## §4 空間 $l_2$

歐幾里得二度空間 $R_2$ 的點乃是有序的實數對 $(a_1,a_2)$。

對於 $R_2$ 中任一點 $M(a_1,a_2)$, 作從原點至點 $M$ 的向徑 $x$ 的話,那末點 $M$ 的座標$(a_1,a_2)$表示向量 $x$ 在坐標軸上的射影。因此數對$(a_1,a_2)$不但可以看作一點,也可以看作一個向量, 這樣的處理是很有意義的。設有兩個向量 $x=(a_1,a_2)$ 與 $y=(b_1,b_2)$, 則可作其和

$$x+y=(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

又對於向量 $x=(a_1,a_2)$ 可乘以實數 $k$:

$$kx=(ka_1,ka_2),$$

但對於點而言，類似的手續就做不起來。

向量 $x=(a_1,a_2)$ 的長是

$$\|x\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

(我們順便注意到，這無非就是畢達哥拉斯的定理)。

其次，對於向量 $x=(a_1,a_2)$ 與 $y=(b_1,b_2)$, 以兩向量間交角 $\theta$ 的餘弦乘其兩向量的長之積得 $x$ 與 $y$ 間的內積 $(x,y)$:

$$(x,y)=\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta.$$

通過向量的射影，可求出

$$(x,y)=a_1b_1+a_2b_2.$$

知道兩向量的內積與兩向量的長時，兩向量間的交角可由關係式

$$\cos\theta=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

決定。

特別，當兩向量直交時，

$$(x,y)=a_1b_1+a_2b_2=0.$$

逐字相同的話，可以敍述三度空間 $R_3$ 中的事情:

1) 有序的三個實數 $x=(a_1,a_2,a_3)$ 可以看作 $R_3$ 中的一點也可以看作 $R_3$ 中的一個向量。

2) 兩個向量可以相加。向量可以乘上一個實數。向量 $x=(a_1,a_2,a_3)$ 之長 $\|x\|$ 由畢達哥拉斯定理是

$$\|x\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

3) 對於向量 $x=(a_1,a_2,a_3)$ 與 $y=(b_1,b_2,b_3)$ 可以作其內積

$$(x,y)=\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

4）已知內積 $(x,y)$ 和向量的長，從

$$\cos\theta=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

得向量間的交角 $\theta$。

5）兩向量直交的條件是

$$(x,y)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

上面所述的關係式可以擴充到 $n$ 度歐幾里得空間 $R_n$ 中去：$n$ 個有序的實數

$$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

稱為 $R_n$ 中的一點或是 $R_n$ 中的一個向量。

$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的長 $\|x\|$ 是

$$\|x\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

至於內積不能再由夾角來定義，只好用下面的等式來表示：

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

反過來，從關係式

$$\cos\theta=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

可以定義角度 $\theta$。要此定義合理，必須證明

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

如果這事已證實（證明在下面），那末很自然的，當兩個向量 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 滿足條件

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=0$$

時，稱它們是相互直交的。

將此拓廣過程繼續前進，自然會引到無限空間 $R_\infty$ 的概念上去 ($R_\infty$ 亦可記爲 $l_2$)。不過對此問題，我們只作向量的探討。

**定義** 有序的實數數列

$$x=(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$$

滿足

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}<+\infty$$

時，稱 $x$ 是空間 $l_2$ 中的一個向量。

稱 $\|x\|$ 爲 $x$ 的長或模數。

顯然，如果 $x\in l_2$, 則對於任意的 $k$, 向量

$$kx=(ka_1, ka_2, ka_3, \cdots\cdots)$$

也屬於 $l_2$, 並且等式

$$\|kx\|=|k|\cdot\|x\|$$

成立。特別是： $\|-x\|=\|x\|$.

假如 $x=(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$ 和 $y=(b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots)$ 都屬於 $l_2$, 那末

$$x+y=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots\cdots)$$

也屬於 $l_2$。事實上，

$$(a_k+b_k)^2\leqslant 2(a_k^2+b_k^2).$$

又由不等式

$$|a_kb_k|\leqslant a_k^2+b_k^2$$

知道級數

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} a_kb_k$$

是絕對收斂的，稱其和爲向量 $x$ 與 $y$ 的內積。

空間 $l_2$ 與 $L_2$ 存在着密切的關係。任意取一就範的完全直交系 $\{\omega_k(x)\}$, 對於 $L_2$ 中任一函數 $f(x)$, 作 $f(x)$ 的富理埃係數列

$$x=(c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots)$$

與之對應。

從封閉公式

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2}=\|f\|<+\infty,$$

知 $x$ 是 $l_2$ 中的向量。

容易證明，這樣的關係是一對一的。事實上，$L_2$ 中不同的兩元素(由於 $\{\omega_k(x)\}$ 的完全性) 對應於 $l_2$ 中不同的兩向量。而由黎斯-菲蕭定理，$l_2$ 中每一個向量是 $L_2$ 中某一函數的富理埃係數所成的數列。

這個對應,除了一對一的性質而外,還有其他的性質:當

$$x\sim f,\ y\sim g$$

時,則

$$x+y\sim f+g,$$
$$kx\sim kf.$$

由是,設 $L_2$ 中的元素 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 之間存在着

$$k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0,$$

那末將 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 換以對應的 $l_2$ 中的元素時此關係式也成立 [$l_2$ 中的向量 $(0, 0, 0, \cdots\cdots)$ 以 0 記之]。假如將此事與等式

$$\|x\|=\|f\|$$

合併考慮，那末空間 $L_2$ 與 $l_2$, 依照幾何學的意義是完全相同。因此空間 $l_2$ 也稱它做希爾貝脫空間。

設

$$x=(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots),\quad y=(b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots)$$

是 $l_2$ 中兩個向量，而 $f$ 與 $g$ 是 $L_2$ 中相對應的元素。一般的封閉公式表示

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=(x,y).$$

由此關係，很自然的，稱積分

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

爲元素 $f$ 和 $g$ 的內積（$L_2$ 中的元素今後亦稱爲該空間的向量），而以記號

$$(f,\ g)$$

記之，由是

$$(f,g)=(x,y).$$

由布涅可夫斯基的不等式，

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|.$$

由此可以定義 $L_2$ 中的元素 $f$ 和 $g$ 間的角度 $\theta$：

$$\cos\theta=\frac{(f,g)}{\|f\|\cdot\|g\|},\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

特別，我們以前定義兩個函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互相直交的條件是

$$(f,\ g)=0,$$

這剛好就是 $L_2$ 中兩個元素相交成 $\frac{\pi}{2}$ 角度的條件。

此外，若 $\omega(x)$ 是就範的函數：

$$\|\omega\|=1,$$

則 $\omega(x)$ 可以看作(直交)空間 $L_2$(或 $l_2$，因爲根據上述，二者是一樣的)

中的單位向量。在此情形下，可以定義向量 $f$ 在方向 $\omega$ 上的射影：

$$\text{射影}_\omega f=\|f\|\cos\theta,$$

其中 $\theta$ 表示向量 $f$ 與 $\omega$ 間的交角。換言之，

$$\text{射影}_\omega f=\int_a^b f(x)\omega(x)dx.$$

這樣一來，$f(x)$ 關於直交系 $\{\omega_k(x)\}$ 的富理埃係數，成爲向量 $f$ 在所說的函數系的方向上的射影。

在 $n$ 度歐幾里得空間中，向量 $x=(a_1, a_2, a_3,\cdots a_n)$ 的長是

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

這是畢達哥拉斯定理的拓廣，因爲 $a_k$ 是向量 $x$ 在座標軸上的射影。現在我們考察其中的 $m(m\leqslant n)$ 個射影。要知道 $n$ 個射影是否全落在所考慮的 $m$ 個軸上，只要比較一下 $m$ 和 $n$ 的大小就行。但也可以從等式

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{m} a_k^2$$

是否對所有的 $x$ 成立來判斷，因爲如果 $m<n$，一定可以找到向量 $x$ 適合於 $\sum_{k=1}^{m} a_k^2<\|x\|$。此外，還可以從能否找出一個方向與所考慮的 $m$ 個軸全部直交來加以決定。

對於無限空間 $L_2$，凡就範直交系 $\{\omega_k(x)\}$ 就是一系直交座標軸。當我們考慮某一組直交系的時候，要弄明白這一組是否已包含可能取到方向的全部，我們就無法直接來數清它。所以我們就會想到將關於 $n$ 度空間所說的另外兩種方法加以拓廣。在拓廣時就自然會引出封閉與

完全二個定義。特別，閉封性與完全性二個概念對於就範直交系是等價的原因變成很清楚了。

至此爲止，我們只是從 $l_2$ 與 $L_2$ 的聯系得出對 $L_2$ 的一種新的看法(這當然很重要)。以後我們還要利用這個聯系建立起一些新的事實。

首先，不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

與布湼可夫斯基的不等式

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$$

具有同樣作用，都表示：

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right). \tag{1}$$

又不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

可以寫作

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}. \tag{2}$$

不等式(1)和(2)具有單純的代數性質。其次，由 $L_2$ 的完備性，$l_2$ 自然也是完備的[即若 $\lim\|x_n-x_m\|=0(n\to\infty,\ m\to\infty)$，則 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是收斂的]。

因爲 $n$ 度空間 $R_n$ 是空間 $l_2$ 的一個閉的子集，所以一切上述諸性質(不等式(1)，(2)，完備性)對於 $R_n$ 也成立。

最後我們還要討論一個問題，從這裏我們可以看出 $L_2$ 與 $l_2$ 的聯系是多麼有用。

固定 $L_2$ 中某一個元素 $g(x)$。對於每一個 $f\in L_2$，取數

$$\Phi(f)=(f,g) \tag{3}$$

與之對應。這樣就在 $L_2$ 上定義着一個取實數值的函數，具有下列性質：

1) $\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2)$

2) $|\Phi(f)|\leqslant K\cdot\|f\|$ $(K=\|g\|)$.

如果以 $L_2$ 中元素作爲變量的函數 $\Phi(f)$ 常取實數值且具有性質 1)和 2)，那末稱它爲空間 $L_2$ 上的一個線性汎函數。我們可以證明，除了(3)以外，在 $L_2$ 上不存在其他的線性汎函數。

定理(萠力許) 若 $\Phi(f)$ 在空間 $L_2$ 上是一線性汎函數，那末 $L_2$ 中有惟一的元素 $g(x)$ 使等式

$$\Phi(f)=(f,g)$$

對於 $L_2$ 中任何元素 $f(x)$ 成立。

**證明** 假定利用某一就範直交系，得着 $L_2$ 與 $l_2$ 間的一對一的對應；這種對應不使線性關係受到擾亂(即 $L_2$ 中元素間的線性關係經對應後變成 $l_2$ 中對應元素的線性關係)並且對應元素的模數相同。

設 $f\in L_2$，在 $l_2$ 中的對應元素是 $x$。令 $\Phi(f)$ 與 $x$ 對應，那末得到一個在 $l_2$ 上定義的汎函數 $\Phi$。$\Phi$ 具有下列性質：當 $x_1\in l_2, x_2\in l_2$ 時，

$$\Phi(x_1+x_2)=\Phi(x_1)+\Phi(x_2),\quad |\Phi(x)|\leqslant K\|x\|.$$

要證明的是：$l_2$ 中有元素 $y$ 對所有 $x$ 適合

$$\Phi(x)=(x,y) \tag{4}$$

首先證明 $\Phi$ 的齊次性質：設 $a$ 是一實數，則

$$\Phi(ax)=a\Phi(x). \tag{5}$$

此式當 $a$ 是正整數時顯然成立。由是(5)式當 $a=\frac{1}{m}$ ($m$ 是自然數)時也成立；從而 $a$ 是正的有理數時(5)式成立。其次，以 0 表示向量 $(0,0,0,\cdots\cdots)$，則

$$\Phi(0)=\Phi(0+0)=2\Phi(0),$$

因此得到 $\Phi(0)=0$。所以(5)式當 $a=0$ 時成立。最後，由

$$0=\Phi(0)=\Phi[x+(-x)]=\Phi(x)+\Phi(-x),$$

知 $\Phi(-x)=-\Phi(x)$；因此當 $a$ 爲任何有理數時都是對的。剩下來要討論的是 $a$ 爲無理數時的情形，設 $r$ 是一有理數，則

$$\Phi(rx)=r\Phi(x). \tag{6}$$

當 $r\to a$ 時，(6)的右邊趨近於(5)之右邊。而(6)的左邊，由

$$|\Phi(rx)-\Phi(ax)|=|\Phi[(r-a)x]|\leqslant K|r-a|\cdot\|x\|,$$

趨近於(5)的左邊。因此(5)式成立。

今引入向量

$$e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots\cdots)$$

(第 $k$ 項等於 1)。設

$$\Phi(e_k)=A_k, \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

則可證

$$y=(A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots)$$

屬於 $l_2$。事實上,如果

$$y_n=(A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,0,0,\cdots\cdots),$$

則 $y_n=\sum_{k=1}^{n}A_ke_k$, 從而

$$\Phi(y_n)=\sum_{k=1}^{n}A_k\Phi(e_k)=\sum_{k=1}^{n}A_k^2.$$

又將不等式 $|\Phi(x)|\leqslant K\cdot\|x\|$ 用到 $y_n$ 上去,乃有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}A_k^2}\leqslant K,$$

因 $n$ 是任意的,所以

$$\|y\|\leqslant K.$$

現在我們證明,這個 $y$ 就是我們所要的元素。即對於任意的 $x\in l_2$, (4) 式成立。

設

$$x=(a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots)$$

是 $l_2$ 中的元素。置

$$x_n=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,0,0,\cdots\cdots),$$

則 $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k$ 而

$$\Phi(x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\Phi(e_k)=\sum_{k=1}^{n}A_ka_k. \qquad (7)$$

當 $n\to\infty$ 時,上式右邊趨近於 $(x,y)$。另一方面,由於

$$|\Phi(x)-\Phi(x_n)|=|\Phi(x-x_n)|\leqslant K\cdot\|x-x_n\|=K\cdot\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^2},$$

因此 $\Phi(x_n)\to\Phi(x)$，故(4)式成立。

今設 $y$ 在 $L_2$ 中的對應元素爲 $g$。又設 $f$ 爲 $L_2$ 中任一元素，$f$ 在 $l_2$ 中的對應元素爲 $x$，則

$$\Phi(f)=\Phi(x)=(x,y)=(f,g).$$

剩下來的證明是：在 $L_2$ 中只有一個元素 $g$ 使關係

$$\Phi(f)=(f,g)$$

對於 $L_2$ 中任一元素 $f$ 成立。

如果這樣的元素有 $g_1$ 與 $g_2$ 兩個，那末對於任意的 $f$，關係

$$(f,g_1-g_2)=(f,g_1)-(f,g_2)=\Phi(f)-\Phi(f)=0$$

成立。置 $f=g_1-g_2$，那末得到

$$(g_1-g_2,g_1-g_2)=\|g_1-g_2\|^2=0,$$

從而 $g_1=g_2$。定理因此完全證畢。

## § 5 線性獨立系

**定義 1** 設 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是在 $[a,b]$ 上所定義的 $n$ 個函數。假如有不全爲零的 $n$ 個常數 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 適合

$$A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)\sim 0, \tag{1}$$

則稱 $\{\varphi_k(x)\}$ 是線性相關的 $n$ 個函數。假如不存在這種常數，即從(1)必導出

$$A_1=A_2=\cdots=A_n=0,$$

那末說：$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是線性獨立的 $n$ 個函數。

顯然的，如果 $n$ 個函數 $\{\varphi_k(x)\}$ 中有一個對等於 0，則 $\{\varphi_k(x)\}$ 是線性相關的；線性獨立系的部分系恆爲線性獨立。

**定理 1** 就範直交系是線性獨立的。

事實上，假如 $\{\omega_k(x)\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 在 $[a,b]$ 上是一就範的直交系，那末，當

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k(x)\sim 0$$

時，乘以 $\omega_i(x)$ 然後積分，得着

$$A_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

由是卽知定理成立。

**定理 2**　設 $n_1,n_2,\cdots,n_i$ 是兩兩相異的 $i$ 個整數，則 $i$ 個函數 $x^{n_1}$, $x^{n_2},\cdots,x^{n_i}$ 在任何閉區間上是線性獨立的。

這是因爲多項式只能有有限個根的緣故。

**定義 2**　函數列 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\cdots$ 中任何有限個函數系爲線性獨立的，稱 $\{\varphi_i(x)\}$ 是一線性獨立系。

就範的直交函數系是一線性獨立系。函數列 $1,x,x^2,\cdots\cdots$ 也是線性獨立的系。

設 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\cdots,\varphi_n(x)$ 是在 $[a,b]$ 上屬於 $L_2$ 的 $n$ 個函數。又設 $f,g$ 是 $L_2$ 中任意二個函數，置

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_2)\cdots\cdots(\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1)(\varphi_2,\varphi_2)\cdots\cdots(\varphi_2,\varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_n,\varphi_1)(\varphi_n,\varphi_2)\cdots\cdots(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

**定義 3**　稱行列式 $\Delta_n$ 爲函數系 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 的克拉茂行列式。

**定理 3** 函數系

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x) \tag{2}$$

線性相關的必要且充分條件是其克拉茂行列式等於 0。

**證明** 設 (2) 是線性相關的 $n$ 個函數，則有不全是 0 的一組常數 $A_1, A_2,\cdots,A_n$ 適合於

$$A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)\sim 0. \tag{3}$$

將此式依次乘以 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$，且逐次積分，乃得

$$\left.\begin{array}{l} A_1(\varphi_1,\varphi_1)+A_2(\varphi_1,\varphi_2)+\cdots+A_n(\varphi_1,\varphi_n)=0 \\ A_1(\varphi_2,\varphi_1)+A_2(\varphi_2,\varphi_2)+\cdots+A_n(\varphi_2,\varphi_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1(\varphi_n,\varphi_1)+A_2(\varphi_n,\varphi_2)+\cdots+A_n(\varphi_n,\varphi_n)=0 \end{array}\right\}. \tag{4}$$

將(4)式中的 $A_k$ 看做未知數，則(4)是以 $\Delta_n$ 爲行列式的一次聯立方程。但因所有的 $A_k$ 並非全是 0, 故必

$$\Delta_n=0. \tag{5}$$

由是(5)是線性相關的必要條件。

今設 $\Delta_n=0$，那末聯立方程(4)有不同於 0 的解。設 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是這樣的一組解，使(4)成爲恆等式。那末

$$\int_a^b \varphi_1(x)[A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)]dx=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)[A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)]dx=0.$$

將上面的等式順次乘以 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 而相加，則得

$$\int_a^b [A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)]^2 dx=0,$$

由是得着(3)式，(3)乃表示系 $\{\varphi_k(x)\}$ 是線性相關的。

**系**　如果

$$\Delta_n\neq 0,$$

則 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{n-1}$ 中沒有一個會等於 0 [$\Delta_1$ 表示 $(\varphi_1,\varphi_1)$]。

事實上，如果 $\Delta_n\neq 0$，則 $\{\varphi_k(x)\}$ 爲線性獨立，所以任何部分系 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m(m<n)$ 是線性獨立的；因此 $\Delta_m\neq 0$。

**補助定理**　設 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是在 $[a,\ b]$ 上屬於 $L_2$ 的 $n$ 個函數。置

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\cdots(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \varphi_1(x)\\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\cdots(\varphi_2,\varphi_{n-1}) & \varphi_2(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2)\cdots(\varphi_n,\varphi_{n-1}) & \varphi_n(x)\end{vmatrix}, \tag{6}$$

則

$$(\psi_n,\varphi_k)=\begin{cases}0 & (k<n)\\ \Delta_n & (k=n).\end{cases}$$

**證明**　要做 $\psi_n(x)$ 和 $\varphi_k(x)$ 的乘積，只要行列式 (6) 的最後一行乘以 $\varphi_k(x)$ 就行。至於 $\psi_n(x)\varphi_k(x)$ 的積分，只要將最後一行作積分就行。證畢。

將行列式 $\psi_n(x)$ 關於最後一行展開，乃得

$$\psi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\Delta_{n-1}\varphi_n(x). \tag{7}$$

顯然的，如果 $\{\varphi_k(x)\}$ 是線性獨立的，則 $\psi_n(x)$ 不對等於 0（因爲 $\Delta_{n-1}\neq 0$）。以 $\psi_n(x)$ 乘 (7) 以後積分，利用補助定理，得

$$\int_a^b \psi_n^2(x)dx = \Delta_{n-1}\Delta_n \tag{8}$$

因此 $\Delta_n$ 與 $\Delta_{n-1}$ (不等於 0)是同號的。同樣的理由可知 $\Delta_{n-1}$ 與 $\Delta_{n-2}$ 是同號，以下類推。因此，$\Delta_n$ 與 $\Delta_1=(\varphi_1,\varphi_1)>0$ 有同符號，這樣，得着下面的定理。

**定理 4** 線性獨立系的克拉茂行列式是正的。

由上面所講的諸事實，可證如下的命題。

**定理 5**（斯密脫） 設在 $[a, b]$ 上定義着有限個或可列個線性獨立的函數 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\cdots$。那末可以建造如下的就範直交系 $\omega_1(x)$, $\omega_2(x),\cdots\cdots$: 1)每一個函數 $\omega_n(x)$ 是 $\{\varphi_k(x)\}$ 最初 $n$ 個函數的線性關聯式，2)每一個函數 $\varphi_n(x)$ 是 $\{\omega_k(x)\}$ 中最初 $n$ 個函數的線性關聯式。

**證明** 置

$$\omega_1(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\Delta_1}},\quad \omega_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\qquad (n\geqslant 2),$$

其中 $\psi_n(x)$ 由 (6)式定義。那末$\{\omega_k(x)\}$就是所要的直交系。

事實上，由(7)，

$$\omega_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$$

顯然成立，因此 $\{\omega_k(x)\}$ 滿足定理中第一個要求。

由補助定理，$\psi_n(x)$ 與所有的函數 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$是直交的，因此 $\omega_n(x)$ 與 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$ (及其線性關聯式)都是直交的。特別，$\omega_n(x)$ 與 $\omega_1(x),\cdots,\omega_{n-1}(x)$ 都是直交。因此，$\{\omega_k(x)\}$ 是兩兩直交的函數系。又由(8)式，所有函數 $\omega_n(x)$ 都是就範的。故得$\{\omega_k(x)\}$是一就範的直交系。

剩下來的事情是要證明

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\omega_k(x). \tag{9}$$

此事當 $n=1$ 時自然成立。今設當 $n<m$ 時爲眞。則由 (7)

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{\Delta_{m-1}}\psi_m(x)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\Delta_{m-1}}\varphi_k(x).$$

於此，將右邊的 $\psi_m(x)$ 換以 $\sqrt{\Delta_{m-1}\Delta_m}\,\omega_m(x)$，又將 $\varphi_k(x)\,(k=1,2,\cdots,m-1)$ 寫成 $\omega_1(x),\cdots,\omega_k(x)$ 的線性關聯式，則知當 $n=m$ 時，(9)式成立。定理證畢。

**注意**　兩系 $\{\varphi_k(x)\}$ 和 $\{\omega_k(x)\}$ 中有一是完全的話，他系也是完全的。

其理由是：若 $h(x)$ 與一系中所有的函數成直交，則 $h(x)$ 與他系中一切函數也成直交。

**例**　函數系

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\cdots$$

在 $[-1,+1]$ 上是線性獨立的。因此，由上定理，從 $\{x^n\}$ 可以得到在 $[-1,+1]$ 上的一系就範的直交多項式

$$L_0(x),L_1(x),L_2(x),\cdots\cdots \tag{10}$$

其中 $L_n(x)$ 是 $n$ 次的多項式[1]。多項式(10)稱爲勒祥特勒多項式。

**定理 6**　勒祥特勒多項式系是封閉的。

**證明**　由斯密脫定理，

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} a_kL_k(x). \tag{11}$$

---

1) 依照定理，$L_n(x)$ 的次不大於 $n$，但是它也不小於 $n$，因爲

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} a_kL_k(x).$$

由 § 3 的開始所述，此地的 $a_k$ 乃是 $x^n$ 關於 $\{L_k(x)\}$ 的富理埃係數。將(11)乘以 $x^n$, 然後在 $[-1,+1]$ 上積分，乃得

$$\|x^n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

此即表示封閉公式對於每一個函數 $x^n(n=0, 1, 2,\cdots\cdots)$ 是成立的，由司捷克洛夫定理的系 1, 知 $\{L_k(x)\}$ 是封閉的。

**系** 函數系 $1, x, x^2,\cdots\cdots$ 是完全的。

## § 6 空間 $L_p$ 與 $l_p$

在本節中我們要簡短的敘述空間 $l_2$ 的一個擴充。

**定義 1** 設 $f(x)$ 爲一可測函數 (跟上文同樣，$f(x)$ 的定義區是某一閉區間 $[a, b]$), $p\geqslant 1$。當

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx<+\infty$$

時，稱 $f(x)$ 是 $p$ 次冪爲 $(L)$ 可積的函數。所有此種函數的全體記作 $L_p$。顯然 $L_1=L$。

**定理 1** 設 $f\in L_p(p>1)$, 則 $f\in L$。即 $L_p\subset L$。

事實上，置 $E=[a,b]$, $A=E(|f|<1)$, $B=E-A$, 則 $f(x)$ 在 $A$ 上顯然是 $(L)$ 可積的，而在 $B$ 上，由於 $|f(x)|\leqslant|f(x)|^p$, 可知 $f(x)$ 在 $B$ 上也是$(L)$可積的。

同樣可證

**定理 2** 設兩個函數都屬於 $L_p$, 則其和亦屬於 $L_p$。

事實上，設 $f(x)$, $g(x)$ 都是 $L_p$ 中的函數。取

$$E=[a, b],\ A=E(|f|\leqslant|g|),\ B=E-A,$$

則在 $A$ 上，

$$|f(x)+g(x)|^p\leqslant\{|f(x)|+|g(x)|\}^p\leqslant 2^p|g(x)|^p.$$

從而

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p dx\leqslant 2^p\int_A |g(x)|^p dx<+\infty.$$

同理可證 $\int_B |f(x)+g(x)|^p dx$ 是一有限數。

容易明白，若 $f(x)\in L_p$，則 $kf(x)$ 亦屬於 $L_p$，其中 $k$ 是一有限常數。

設 $p>1$。稱

$$q=\frac{p}{p-1}$$

是 $p$ 的相伴數。因

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

知道：當 $q$ 是 $p$ 的相伴數時，$p$ 亦爲 $q$ 的相伴數。若 $p=2$，則 $q=2$；所以 2 是自身相伴的（因此，在空間 $L_2$ 中成立的性質，不能一一移到空間 $L_p$ 上去）。

**定理 3**　若 $f(x)\in L_p, g(x)\in L_q$，則當 $p$ 和 $q$ 成相伴數時，$f(x)g(x)$ 是 $(L)$ 可積的，並且不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}\qquad(1)$$

成立。

**證明**　設 $0<\alpha<1$，函數

$$\psi(x)=x^\alpha-\alpha x\qquad(0<x<+\infty)$$

的導函數 $\psi'(x)=\alpha[x^{\alpha-1}-1]$ 在 $0<x<1$ 中是正的，當 $x>1$ 時是負的。由是 $\psi(x)$ 在 $x=1$ 取最大值，所以

$$\psi(x)\leqslant\psi(1)=1-\alpha \qquad (0<x<+\infty).$$

因此，對於所有的 $x>0$,

$$x^{\alpha}\leqslant\alpha x+(1-\alpha). \tag{2}$$

設 $A,B$ 是兩個正數，於(2)中置 $x=\frac{A}{B}$，再乘以 $B$，則得

$$A^{\alpha}B^{1-\alpha}\leqslant\alpha A+(1-\alpha)B.$$

設 $p$ 和 $q$ 是相伴的兩數。置 $\alpha=\frac{1}{p}$, $1-\alpha=\frac{1}{q}$，那末

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{A}{p}+\frac{B}{q}. \tag{3}$$

所以不等式(3)當 $A>0, B>0$ 時是成立的。實際上，當 $A\geqslant0$, $B\geqslant0$ 時也是成立的。

現在我們來證明本定理。假如 $f$ 與 $g$ 中至少有一個函數對等於 0，則定理自眞。現在假設

$$\int_a^b|f(x)|^p dx>0,\quad \int_a^b|g(x)|^q dx>0,$$

作函數

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt[p]{\int_a^b|f(x)|^p dx}},\quad \gamma(x)=\frac{g(x)}{\sqrt[q]{\int_a^b|g(x)^q|dx}}.$$

於不等式(3)，置

$$A=|\varphi(x)|^p,\quad B=|\gamma(x)|^q,$$

則得

$$|\varphi(x)\gamma(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\gamma(x)|^q}{q}. \tag{4}$$

所以 $\varphi(x)\gamma(x)$ 是 $(L)$ 可積的。因之，$f(x)g(x)$ 也是$(L)$可積的。因

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx = \int_a^b |\gamma(x)|^q dx = 1,$$

故將(4)式積分，得着

$$\int |\varphi(x)\gamma(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

從而得着不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}\,.$$

此式較諸(1)更强。

不等式(1)稱爲罕爾竇不等式，是布湼可夫斯基不等式的擴充，後者是(1)式當 $p=2$ 時的情形。

**定理 4**　若 $f(x)\in L_p, g(x)\in L_p\,(p\geqslant 1)$，則

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p dx}. \tag{5}$$

**證明**　當 $p=1$ 時定理自真。設 $p>1$，$q$ 是 $p$ 的相伴數。

根據定理 2，$f(x)+g(x)$ 屬於 $L_p$，所以 $|f(x)+g(x)|^{p/q}$ 屬於 $L_q$。將罕爾竇不等式中的 $f(x)$ 換以 $|f(x)|$，$g(x)$ 換以 $|f(x)+g(x)|^{p/q}$，乃得

$$\int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}\,dx \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}\;\cdot$$

$$\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx}. \tag{6}$$

同樣，

$$\int_a^b |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}\,dx \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p dx}\cdot$$

$$\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx}. \tag{7}$$

因 $p=1+\frac{p}{q}$，所以

$$|f+g|^p=|f+g|\cdot|f+g|^{p/q}\leqslant|f|\cdot|f+g|^{p/q}+|g|\cdot|f+g|^{p/q}.$$

由(6)與(7)，得

$$\int_a^b |f+g|^p dx \leqslant \left\{\sqrt[p]{\int_a^b |f|^p dx}+\sqrt[p]{\int_a^b |g|^p dx}\right\}\cdot$$

$$\sqrt[q]{\int_a^b |f+g|^p dx},$$

從而得着(5)。(當 $\int_a^b |f+g|^p dx \neq 0$ 時，以 $\left(\int_a^b |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$ 除上式卽行。若積分等於 0 則定理自眞)。

稱(5)爲明可夫斯基不等式。當 $p=2$ 時卽爲柯西不等式。

對於若干個數的和而言也有相當於上面的罕爾賓不等式和明可夫斯基不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q} \quad \left(p>1, q=\frac{p}{p-1}\right) \tag{8}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p}. \quad (p\geqslant 1) \tag{9}$$

**定義 2**　設$f(x)\in L_p$，稱

$$\|f\| = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$

爲$f(x)$（看作$L_p$中的元素）的模數。

顯然的，模數具有下列諸性質：

I. $\|f\|\geqslant 0$，當$f(x)\sim 0$且僅當此時，$\|f\|=0$.

II. $\|kf\|=|k|\cdot\|f\|$，特別是，$\|-f\|=\|f\|$.

III. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

有了$L_p$中元素的模數的定義，可以將從前關於$L_2$所說的幾何學概念施行於$L_p$。假如$\{f_n(x)\}$中一切函數都屬於$L_p$，且$f(x)\in L_p$，則當

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p dx=0$$

時，稱$\{f_n(x)\}$是$p$次平均收斂於$f(x)$。如同在$L_2$中的情形一樣，我們可以從$p$次平均收斂導出度量收斂的性質，且極限相同（視對等的兩函數爲同一函數）。如同在$L_2$時之情形一樣，我們可證模數的連續性以及極限的惟一性（對等的兩函數視爲同一函數）。又可仿照$L_2$中的情形，定義本來收斂函數列的意義。從而知道$L_p$中的函數列具有極限的必要且充分條件是此函數列爲本來收斂(空間$L_p$的完備性)。

爲了節省篇幅起見，對於上述種種不加以證明。同樣，下面種種事實我們也不加以證明(參閱 § 2 的定理 6)：$M, C, P, S$ 和 $T$（後者滿足 $b-a=2\pi$）在空間 $L_p$ 中是處處稠密的。

當 $p>1$ 時，亦可引進弱性收斂的概念：設 $\{f_n(x)\}\subset L_p, f(x)\in L_p$，假如等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{10}$$

對於 $L_q$（此地 $q$ 是 $p$ 的相伴數)中任一函數 $g(x)$ 成立，則稱 $\{f_n(x)\}$ 弱性收斂於 $f(x)$。利用罕爾竇不等式，易證：平均收斂的函數列是弱性收斂的，且極限相同。

當 $p=1$ 時，則 $p$ 不具有相伴的數。此時，設 $\{f_n(x)\}\subset L, f(x)\in L$，如果(10)式對於任一有界可測函數 $g(x)$ 成立，則稱 $\{f_n(x)\}$ 弱性收斂於 $f(x)$。顯然的，若 $\{f_n(x)\}$ 是一次的平均收斂，則亦爲弱性收斂，且極限相同。

最後，我們簡短地敍述一下空間 $l_p(p\geqslant 1)$。所謂 $l_p$ 乃滿足條件

$$\|x\|=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}<+\infty$$

的一切實數數列

$$x=(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots)$$

的全體。稱 $\|x\|$ 爲 $l_p$ 中元素 $x$ 的模數。如同 $l_2$ 中所述，我們可以定義 $l_p$ 中兩個元素的和 $x+y$ 及 $l_p$ 中元素 $x$ 與實數 $k$ 之積 $kx$。

模數具有我們已熟知的性質：

I. $\|x\|\geqslant 0$，當 $x=0$（即 $x=(0,0,0,\cdots\cdots)$）時且僅當此時，$\|x\|=0$。

II. $\|kx\|=|k|\cdot\|x\|$，特別是：$\|-x\|=\|x\|$.

III.　$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

最初兩個性質是很顯然的，第三個性質由(9)卽得[(9)式雖然是對於有限個和而說的，不過運用極限手續以後可以擴充到無窮級數的和上去]。因模數概念的引入，我們可以引入 $l_p$ 中元素列的極限概念，元素列的本來收斂，在 $l_p$ 中處處稠密的集等概念。我們可以證明 $l_p$ 中元素列的極限是惟一的，模數是連續的，空間 $l_p$ 具有完備性，但是我們在此地不加詳述。

## 第七章的習題

1.　設 $\{f_n(x)\}$ 是 $L_2$ 中度量收斂於 $F(x)$ 的函數列。若 $\|f_n\| \leqslant K$，則 $\{f_n(x)\}$ 弱性收斂於 $F(x)$（黎斯）。

2.　如果函數列 $\{f_n(x)\}$ 在 $L_2$ 中弱性收斂於 $F(x)$，則 $\|f_n\| \leqslant K$（勒貝格）。

3.　在 $L_2$ 中，弱性收斂於 $F(x)$ 的函數列 $\{f_n(x)\}$ 未必是度量收斂。

4.　如果 $\{f_n(x)\}$ 在 $L_2$ 中弱性收斂於 $F(x)$，且 $\|f_n\| \to \|F\|$，則 $\{f_n(x)\}$ 平均收斂於 $F(x)$（黎斯）。

5.　假如積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 對於 $L_2$ 中所有的函數 $f(x)$ 存在，則 $g(x) \in L_2$（勒貝格）。

6.　凡就範直交系至多是可列的。

7.　設 $\{\omega_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上封閉的就範直交系，則在 $[a,b]$ 上關係 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2(x)=+\infty$ 幾乎處處成立（奧爾里奇）。

8.　在上述的條件下，對於任何可測集 $e$ 其測度 $me>0$ 的常是 $\sum_{k=1}^{\infty} \int_e \omega_k^2\, dx=+\infty$（奧爾里奇）。

9.　個數有限的函數系，在 $L_2$ 中不可能是完全的。

10.　設 $\{\omega_k(x)\}$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ 是一個就範直交系。又設 $f(x) \in L_2$。對於線性關聯式 $\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k(x)$，作模數 $\left\|f-\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k\right\|$，則此模數當 $A_k=(f,\omega_k)$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ 時取最小值（袞拍來爾）。

11. 設 $\{\omega_k(x)\}$ 是一完全就範直交系。假如 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L_2$ 中滿足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b[\omega_k(x)-\varphi_k(x)]^2dx<1$$

的一系函數,那末 $\{\varphi_k(x)\}$ 也是完全的(巴麗)。

12. 設在 $[-\pi, \pi]$ 上有函數 $f(x)\in L_2$ $f(x+2\pi)=f(x)$。置

$$g_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt,$$

則函數列 $g_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上平均收斂於 $L_2$ 中之一函數 $q(x)$,且

$$\|q\|\leqslant\|f\|\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt,$$

其中乘數 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$ 不能再減小(那湯松)。

13. 設在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 屬於 $L_2$, 在 $[a, b]$ 之外 $f(x)=0$。置

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt,$$

則 $\|\varphi\|\leqslant\|f\|$(柯爾莫廓洛夫)。

14. 在前題記號下,當 $h\to 0$ 時函數 $\varphi(x)$ 在 $L_2$ 中平均收斂於 $f(x)$(柯爾莫廓洛夫)。

15. 試將習題 1,2,3,4,5,13,14 關於 $L_2$ 的結果拓廣到空間 $L_p(p>1)$ 上去。

16. 證明空間 $L_p(p\geqslant 1)$ 是完備的。

17. 證明空間 $l_p(p\geqslant 1)$ 是完備的。

18. 有界敍列 $x=\{x_k\}$——$\|x\|=\sup\{|x_k|\}<+\infty$——的全體,所成的空間 $m$ 是完備的。

19. 設 $[a, b]$ 上的連續函數的全體是 $C$。若取 $C$ 中 $f$ 的模數 $\|f\|=\max|f(x)|$,則 $C$ 是一完備的空間。

20. 如果在函數集 $A$ 中不存在異於零的函數而與函數系 $\{\varphi_k(x)\}$ 中所有函數成直交,則稱 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $A$ 中是完全的。在 $(R)$ 可積的函數集中爲完全的就範直交系未必是封閉的(菲赫秦戈里衣)。

21．若 $1\leqslant r<p$，則 $L_p\subset L_r$。

22．若 $1\leqslant r<p$，則 $l_p\supset l_r$。

23．設 $p>1$, $\{f_n(x)\}\subset L_p$。若 $f_n(x)$ $p$ 次平均收斂於 $F(x)$，$F(x)\in L_p$，則當 $1\leqslant r<p$ 時 $\{f_n(x)\}$ $r$ 次平均收斂於 $F(x)$。

24．設 $1\leqslant r<p$，$x_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \cdots\cdots)\in l_r$。若 $x_n$ 在空間 $l_r$ 中收斂於 $x$，則 $x_n$ 在 $l_p$ 中也收斂於 $x$。

25．如果數列 $\{a_k\}$ 有如下的性質：對於任意的 $\{x_k\}\in l_p (p>1)$ 能使 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ 收斂，則 $\{a_k\}\in l_q$，但 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

26．如果 $\{a_k\}$ 有如下的性質：對於任意的 $\{x_k\}\in l=l_1$，能使 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ 收斂，則 $\{a_k\}\in m$，即 $\sup\{|a_k|\}<+\infty$。

27．設 $p>1$。若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 能使明可夫斯基不等式 (5) 中等號成立，則必 $g(x)=Kf(x)$，其中 $K\geqslant 0$。

# 第八章　有界變差函數、司帝階積分

## §1　單調函數

在閉區間 $[a, b]$ 上定義的函數 $f(x)$，當

$$x<y \tag{1}$$

時，若不等式

$$f(x)\leqslant f(y)$$

常成立，則稱 $f(x)$ 是一增加的函數。

若 (1) 含有 $f(x)<f(y)$ 則稱 $f(x)$ 是一常增函數。假如 (1) 含有 $f(x)\geqslant f(y)$ $[f(x)>f(y)]$，則稱 $f(x)$ 是一減少函數 [常減函數]。增加函數與減少函數均稱爲單調函數。若 $f(x)$ 是一減少函數，則 $-f(x)$ 是一增加函數。故研究單調函數不妨假設是增加函數，並且我們常假設函數是有限的。

設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的增加函數。設 $x_0$ 滿足

$$a\leqslant x_0<b,$$

$\{x_n\}$ 是如下的點列：　$x_n>x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0,$

那末極限值

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

存在，這個極限正好是 $f(x)$ 在 $(x_0, b]$ 的下確界：

$$\inf\{f(x)\} \qquad (x_0<x\leqslant b).$$

因爲它與 $\{x_n\}$ 的選擇無關，我們記它做

$$f(x_0+0) \qquad (a\leqslant x_0<b).$$

同樣可以定義

$$f(x_0-0) \qquad (a<x_0\leqslant b).$$

易知

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0) \qquad (a<x_0<b),$$

$$f(a)\leqslant f(a+0),\ f(b-0)\leqslant f(b).$$

因此函數$f(x)$在$x_0$爲連續的必要且充分的條件是

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).$$

[如果$x_0$等於$a$或等於$b$，那末只要考慮$f(a+0)=f(a)$和$f(b-0)=f(b)$的成立與否好了]。

我們稱數

$$f(x_0)-f(x_0-0),\ f(x_0+0)-f(x_0)$$

爲$f(x)$在$x_0$的左方跳躍和右方跳躍，而稱兩者之和$f(x_0+0)-f(x_0-0)$爲$f(x)$在$x_0$的跳躍(在端點$a$和$b$只考慮一方的跳躍)。

**補助定理**　設$f(x)$是在$[a,b]$上所定義的增加函數。設$x_1, x_2, \cdots, x_n$是$(a,b)$中的點，則

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\leqslant f(b)-f(a). \qquad (2)$$

**證明**　我們不妨假設

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b.$$

置$a=x_0$，$b=x_{n+1}$，又引入如下的點$y_0, y_1, \cdots, y_n$：

$$x_k<y_k<x_{k+1} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

則

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\leqslant f(y_k)-f(y_{k-1}) \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

$$f(a+0)-f(a)\leqslant f(y_1)-f(a)$$

$$f(b)-f(b-0)\leqslant f(b)-f(y_n).$$

將這些不等式邊邊相加，即得(2)。

系 $[a, b]$ 上的增加函數，只能有有限個的點，其跳躍大於已給正數 $\sigma$。

事實上，設函數 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 中的點 $x_1, x_2, \cdots; x_n$ 具有跳躍大於 $\sigma$，則由(2)，得

$$n\sigma \leqslant f(b)-f(a),$$

因此，$n$ 不大於 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\sigma}$.

**定理 1** 設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的增加函數，則其不連續點頂多只有可列無限個。設 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 是 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 中所有的不連續點，則

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b) \\ -f(b-0)] \leqslant f(b)-f(a). \qquad (3)$$

**證明** 記 $f(x)$ 的不連續點的全體爲 $H$，$H_k$ 是 $H$ 的一子集，在 $H_k$ 中任何點，$f(x)$ 之跳躍大於 $\dfrac{1}{k}$。那末

$$H=H_1+H_2+H_3+\cdots\cdots,$$

由於每一個 $H_k$ 是有限集，$H$ 是一可列集。

不等式(3)乃由不等式(2)經過極限手續得到的。

設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的增加函數。作如下的函數 $s(x)$:

$$s(a)=0,$$

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+ \\ +[f(x)-f(x-0)] \qquad (a<x\leqslant b).$$

稱 $s(x)$ 爲 $f(x)$ 的跳躍函數，顯然的，$s(x)$ 也是增加函數。

**定理 2** 增加函數 $f(x)$ 與其跳躍函數 $s(x)$ 的差

$$\varphi(x)=f(x)-s(x)$$

是一增加的連續函數。

**證明**　設 $a\leqslant x<y\leqslant b$。將不等式 (3) 用到 $[x,y]$ 上去，乃得不等式

$$s(y)-s(x)\leqslant f(y)-f(x). \tag{4}$$

從而

$$\varphi(x)\leqslant\varphi(y),$$

所以 $\varphi(x)$ 是一增加函數。

其次，在(4)中令 $y$ 趨近於 $x$，則得

$$s(x+0)-s(x)\leqslant f(x+0)-f(x). \tag{5}$$

另一方面，由 $s(x)$ 的定義和 $x<y$，得

$$f(x+0)-f(x)\leqslant s(y)-s(x).$$

從而當 $y\to x$ 時，

$$f(x+0)-f(x)\leqslant s(x+0)-s(x).$$

將上式與(5)聯繫，得

$$f(x+0)-f(x)=s(x+0)-s(x),$$

因此得到

$$\varphi(x+0)=\varphi(x).$$

同樣可得 $\varphi(x-0)=\varphi(x)$。所以 $\varphi(x)$ 是一連續函數。

## § 2　集的映照、單調函數的微分

設 $f(x)$ 是在集 $A$ 上所定義的函數。

對於 $A$ 的每一個子集 $E$，作實數 $f(x)$ $(x\in E)$ 的全體，記此全體爲 $f(E)$。換言之，如點 $y$ 使方程式 $f(x)=y$ 在 $E$ 得到 $x$ 的解，則 $f(E)$ 即由此種點 $y$ 的全體所組成，而且不含其他的點。稱實數集 $f(E)$ 爲 $E$ 的像，而稱 $E$ 爲 $f(E)$ 的原像。此時，稱爲將 $E$ 映照到 $f(E)$ 上去。

**定理 1** 設 1) $E_1 \subset E_2$; 2) $E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, 則分別成立: 1) $f(E_1) \subset f(E_2)$; 2) $f(E)=\sum_{n=1}^{\infty} f(E_n)$.

這是很顯然的事。

特別,當 $A$ 與 $f(A)$ 的映照是一對一的時候,那末映照的理論是簡單的。此時存在着逆函數 $x=g(y)$,定義於 $f(A)$ 而取值於 $A$。在這種情形下,關係

$$f(\prod_{n=1}^{\infty} E_n)=\prod_{n=1}^{\infty} f(E_n)$$

成立。假如 $E_1$ 與 $E_2$ 不相交,則 $f(E_1)$ 和 $f(E_2)$ 也不相交。

例如 $f(x)$ 在 $A=[a,b]$ 上是一連續的常增函數,則 $f(A)=[f(a), f(b)]$。

映照的理論對於研究函數的微分,頗有用處。

**定義** 假如有收斂於 0 的數列 $h_1, h_2, h_3, \cdots\cdots (h_n \neq 0)$,使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

存在,則稱 $\lambda$ (不論 $\lambda$ 是有限數或無限數) 是函數 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一個導數。

當 $\lambda$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一個導數時,記作

$$\lambda=Df(x_0).$$

假如在點 $x_0$, $f(x)$ 具有通常的導數(不論是有限或無限) $f'(x_0)$ 的話,那末它也是一個導數 $Df(x_0)$, 且此時 $f(x)$ 在點 $x_0$ 再也沒有別的導數,稱 $f(x)$ 在點 $x=x_0$ 可以微分。

下面的例子表示有的函數在每點有不止一個的導數。今設函數 $\psi(x)$ 定義如下: 當 $x$ 爲無理數時 $\psi(x)$ 等於 0, 當 $x$ 爲有理數時 $\psi(x)$

等於 1。

假如 $x_0$ 是一有理數，那末

$$\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h}=\begin{cases} 0 & (h \text{ 爲有理數}) \\ -\frac{1}{h} & (h \text{ 爲無理數})。\end{cases}$$

因此，$\psi(x)$ 在 $x_0$ 有三個導數：$-\infty, 0, +\infty$；除此而外別無導數。當 $x_0$ 爲無理數時有同樣的狀態。

**定理 2**　設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上所定義的函數，那末在 $[a, b]$ 中各點都有導數。

**證明**　設 $x_0\in[a, b]$。設 $\{h_n\}$ $(h_n\neq 0)$ 是一收斂於 0 的數列且 $x_0+h_n\in[a,b]$。置

$$\sigma_n=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}.$$

如果 $\{\sigma_n\}$ 是一有界數列，那末由波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理必有收斂子數列 $\{\sigma_{n_k}\}$，設其極限是 $\lambda$，則 $\lambda$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一個導數。如果 $\{\sigma_n\}$ 是無界，例如無上界，那末必有 $\{\sigma_{n_k}\}$ 趨於 $+\infty$。此時，$+\infty=Df(x_0)$。

**定理 3**　設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上所定義的函數。設 $x_0\in[a, b]$。函數 $f(x)$ 在 $x_0$ 可以微分的必要且充分條件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一切導數都相等。

條件的必要性甚爲顯然，且已述於前。

對於條件的充足性，設 $\lambda$ 爲其所有導數的數値，必須證明下面的事實：對於一切收斂於 0 的數列 $\{h_n\}$ $(h_n\neq 0)$，存在着極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda.$$

假如不是這樣的話，那末至少存在着一個數列 $\{h_n\}$ $(h_n\to 0, h_n\neq 0)$，

使

$$\sigma_n=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

不收斂於 $\lambda$。[我們不妨就 $-\infty<\lambda<+\infty$ 來討論，如果 $\lambda=\pm\infty$，則所述可更簡單化]。因此有正數 $\varepsilon$，使無限個的 $\sigma_n$ 在 $(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon)$ 之外。這個無限集中應該含有一個收斂數列 $\{\sigma_{n_k}\}$，收斂於一個極限 $\mu$（有限數或無窮大），這個 $\mu$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一個導數，但與 $\lambda$ 不同，此事與假設不合。

**補助定理 1** 設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上所定義的增加函數，則其一切導數不取負數。

這個補助定理，甚爲明顯。

**補助定理 2** 設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上所定義的常增函數。假如對於 $E\subset[a, b]$ 中每一點 $x$，至少有一個如下的導數

$$Df(x)\leqslant p \qquad (p\geqslant 0)$$

則

$$m^*f(E)\leqslant p\cdot m^*E.$$

**證明** 設 $\varepsilon>0$。設 $G$ 是一如下的有界開集：

$$E\subset G,\ mG<m^*E+\varepsilon.$$

其次設 $p_0>p$。如果 $x_0\in E$，則必有收斂於 0 的數列 $\{h_n\}$，適合

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)\leqslant p.$$

在此情形下，當 $n$ 足够大時，$[x_0, x_0+h_n]$[1] 完全含在 $G$ 中，且

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p_0.$$

於此我們不妨設上述二式對於一切 $n$ 都成立，並記

1) 於此我們假設 $h_n>0$。如果 $h_n<0$，則應考慮 $[x_0+h_n, x_0]$。不過我們可以用 $[\alpha, \beta]$ 表示介乎 $\alpha$ 與 $\beta$ 間的數的全體，不論 $\alpha\leqslant\beta$ 或是 $\alpha>\beta$。

$$d_n(x_0)=[x_0,\ x_0+h_n],\ \Delta_n(x_0)=[f(x_0),f(x_0+h_n)].$$

因 $f(x)$ 是一增加函數，所以

$$f[d_n(x_0)]\subset\Delta_n(x_0).$$

又因

$$md_n(x_0)=|h_n|,\ m\Delta_n(x_0)=|f(x_0+h_n)-f(x_0)|,$$

所以

$$m\Delta_n(x_0)<p_0\cdot md_n(x_0).$$

由於 $h_n\to 0$，必有 $\Delta_n(x_0)$，其長小於 $\varepsilon$ 的。又因 $E$ 的像 $f(E)$ 乃由一切 $f(x_0)$ 所組成，而 $f(x_0)$ 含在 $\Delta_n(x_0)$ 之中，所以 $f(E)$ 是依照維他利的意義被 $\Delta_n(x)$ $(x\in E)$ 所遮蓋。（這裏用到 $f(x)$ 爲常增的條件，否則的話可能有 $\Delta_n(x)$ 爲一點，就不能應用維他利定理）。於是在這些閉區間中，可以找到兩不相交的閉區間列 $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，使

$$m\left[f(E)-\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i)\right]=0.$$

顯然的

$$m^*f(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m\Delta_{n_i}(x_i)<p_0\cdot\sum_{i=1}^{\infty}md_{n_i}(x_i).$$

我們注意：不但 $\Delta_{n_i}(x_i)$ 間任何二個不相交，且 $d_{n_i}(x_i)$ 之間也沒有兩個相交的。（事實上，如果 $z\in d_{n_i}(x_i)\cdot d_{n_k}(x_k)$，則 $f(z)\in\Delta_{n_i}(x_i)\cdot\Delta_{n_k}(x_k)$）。

因此

$$\sum_{i=1}^{\infty}md_{n_i}(x_i)=m\left[\sum_{i=1}^{\infty}d_{n_i}(x_i)\right].$$

但因

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i) \subset G,$$

所以

$$m^*f(E) < p_0 mG < p_0[m^*E + \varepsilon).$$

令 $\varepsilon$ 趨近於 0, $p_0$ 趨近於 $p$, 即得補助定理 2 的結果。

用相似的方法,不過略爲複雜一些,可證

**補助定理 3** 設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上所定義的常增函數。如果對於 $E\subset[a, b]$ 中每一點 $x$, 至少存在一個如下的導數

$$Df(x) \geqslant q \qquad (q \geqslant 0),$$

那末

$$m^*f(E) \geqslant q \cdot m^*E.$$

**證明** 當 $q=0$ 時定理顯然成立。今設 $q>0$。設 $q_0$ 是一小於 $q$ 的一個正數。對於 $\varepsilon>0$, 取如下的開集 $G$:

$$G \supset f(E), \ mG < m^*f(E) + \varepsilon.$$

設函數 $f(x)$ 在 $E$ 中的連續點的全體爲 $S$。則 $E-S$ 頂多只是一個可列集,因爲單調函數之不連續點的全體至多是一可列集。

設 $x_0 \in E$, 則必有 $\{h_n\}$ 適合於

$$h_n \to 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geqslant q.$$

我們不妨假設對於所有的 $n$, 不等式

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} > q_0$$

都成立。因此,也像以前一樣,記

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0+h_n], \ \Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0+h_n)],$$

則得

$$m\Delta_n(x_0) > q_0 \cdot md_n(x_0).$$

如果 $x_0 \in s$, 那末當 $n$ 適當大時，閉區間 $[f(x_0), f(x_0+h_n)]$ 完全含在 $G$ 之中。我們又不妨設對於所有的 $n$, $G \supset [f(x_0), f(x_0+h_n)]$。

點集 $S$ 依照維他利的意義完全被閉區間 $d_n(x)(x \in S)$ 所遮蓋。所以在這些閉區間中可以選取兩兩不相交的閉區間列 $\{d_{n_i}(x_i)\}$, 使

$$m[S-\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)]=0.$$

因此

$$m^*S \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m d_{n_i}(x_i) < \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i).$$

但因 $\Delta_{n_i}(x_i)$, 如同 $d_{n_i}(x_i)$ 一樣，也是兩兩不相交的（此地正好用到 $f(x)$ 的常增條件），所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i) = m\left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)\right] \leqslant mG < m^*f(E)+\varepsilon.$$

於是得到

$$m^*S < \frac{1}{q_0}[m^*f(E)+\varepsilon].$$

令 $\varepsilon$ 接近於 0, $q_0$ 接近於 $q$ 即得

$$m^*f(E) \geqslant qm^*S.$$

但 $m^*E \leqslant m^*S + m^*(E-S) = m^*S$. 所以補助定理 3 成立。

**系** 設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的增加函數，則使 $f(x)$ 至少有一個導數為無窮大的點 $x$ 的全體成一測度為零的集。

事實上，首先假設 $f(x)$ 是一常增函數。此時如果

$$m^*E(Df(x)=+\infty)>0,$$

則 $E$ 的像 $f(E)$ 的外測度應該是無窮大，但這件事是不可能的，因為 $f(E)$ 位在 $[f(a), f(b)]$ 中之故。所以此時所述是真的。假如 $f(x)$

是增加函數而並非常增函數。那末

$$g(x)=f(x)+x$$

成一常增函數。由於

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+1,$$

當 $Df(x)=+\infty$ 時，必定 $Dg(x)=+\infty$。但已證對於 $g(x)$ 而言，所述是眞的；因此對於 $f(x)$ 也是眞的。

**補助定理 4** 設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上所定義的增加函數。設 $p<q$。又設 $E_{p,q}\subset[a,b]$，$E_{p,q}$ 中任一點 $x$ 有二個導數 $D_1f(x)$ 和 $D_2f(x)$ 適合

$$D_1f(x)<p<q<D_2f(x),$$

則 $mE_{p,q}=0$。

事實上，首先假設 $f(x)$ 是一常增函數。那末應用補助定理 2 和補助定理 3，

$$m^*f(E_{p,q})\leqslant p\cdot m^*E_{p,q},\ m^*f(E_{p,q})\geqslant q\cdot m^*E_{p,q},$$

從而

$$qm^*E_{p,q}\leqslant pm^*E_{p,q},$$

所以 $m^*E_{p,q}=0$。

假如 $f(x)$ 是一增加函數，那末 $g(x)=f(x)+x$ 是一常增函數。將已經證明的事實用到 $g(x)$ 上去，就可以完成補助定理 4 的證明。

現在，讓我們證明本節中的主要定理。

**定理 4** 設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上定義的增加函數(未必是連續的)，那末在 $[a,b]$ 中幾乎對於所有的 $x$，$f(x)$ 是可以微分的且存在着有限的 $f'(x)$。

**證明** 設在 $[a,b]$ 中，$f'(x)$不存在的點的全體爲 $E$。那末當 $x_0\in$

$E$ 時，必有不相等的二個導數 $D_1f(x_0)$ 和 $D_2f(x_0)$。今設 $D_1f(x_0)<D_2f(x_0)$。因此可以取有理數 $p$ 和 $q$ 使

$$D_1f(x_0)<p<q<D_2f(x_0).$$

顯然是

$$E=\sum_{(p,q)}E_{p,q},$$

其中 $E_{p,q}$ 表示 $[a,b]$ 中這種點 $x$ 的全體：在 $x$，$f(x)$ 具有兩個導數 $D_1f(x)$ 和 $D_2f(x)$ 適合

$$D_1f(x)<p<q<D_2f(x).$$

式中的加法記號 $\sum_{(p,q)}$ 施行於一切有理數對 $(p,q)$，但 $p<q$。

依照補助定理 4，每一個 $E_{p,q}$ 之測度是 0，而 $\sum_{(p,q)}$ 中項數是可列的，所以 $mE=0$。

由是，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 中幾乎處處存在。又由補助定理 3 的系，$f'(x)=+\infty$ 的點 $x$，其全體是一測度爲零的集，因此定理完全證畢。

今後對於增加函數 $f(x)$，規定導函數 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 中處處具有意義。在 $f'(x)$ 存在的點，自然無問題。在 $f(x)$ 不可以微分的點 $x$，則定義 $f'(x)=0$。

**定理 5**　設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定義的增加函數，則其導函數 $f'(x)$ 是可測的，且

$$\int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a),$$

此式表示 $f'(x)$ 是一 $(L)$ 可積函數。

**證明**　我們將 $f(x)$ 的定義範圍擴大如下：

$$當\ b<x\leqslant b+1\ 時，定\ f(x)=f(b).$$

那末，在 $[a,b+1)$ 中(除了 $x=b$ 而外，$f'(b)$ 原來只是左方導數)對於

$f(x)$ 可以微分的點 $x$，成立着

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

因爲 $f(x)$ 和 $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ 都是增加函數，所以都是可測的函數[1]，因此 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$（除了一個測度是零的集而外）是可測函數列的極限函數，所以是可測的。又因 $f'(x)$ 不取負數，所以由第六章 § 1，勒貝格積分

$$\int_a^b f'(x)dx$$

是有意義的，由法都定理 [第六章 § 1]，

$$\int_a^b f'(x)dx\leqslant \sup\left\{n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\right\}.$$

但因

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx=\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx$$

（此地並沒有用到勒貝格積分變數變換的理論，因爲增加函數 $f(x)$ 依黎曼意義是可以積分的），所以

$$\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx=\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{n}f(b)-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\leqslant\frac{1}{n}[f(b)-f(a)],$$

---

1) $E(f>c)$ 或是空集或是一個區間.

從而得到

$$\int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b)-f(a).$$

我們在習慣上，有導函數的積分即爲原函數的了解。因此對於定理中的不等號，不大順眼。但是一般的說，上式中等號可能不成立，甚至當函數 $f(x)$ 是連續時等號也未必成立。

例 設 $P_0$ 是康脫的完全集。將它的餘區間集分成如下的類別：第一類是一個區間$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，第二類是兩個區間$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$，第三類是四個區間$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$，$\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$，$\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$，$\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$，依此類推，在第 $n$ 類中有 $2^{n-1}$ 個區間。

今作函數 $\Theta(x)$ 如下：

$$當 x\in\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)時\ \Theta(x)=\frac{1}{2},$$

$$當 x\in\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)時\Theta(x)=\frac{1}{4}，當 x\in\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)時\ \Theta(x)=\frac{3}{4},$$

在第三類的四個區間中 $\Theta(x)$ 依次取值$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$，一般的說：在第 $n$ 類的 $2^{n-1}$ 個區間中 $\Theta(x)$ 依次取值

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots\cdots, \frac{2^n-1}{2^n}。$$

於是 $\Theta(x)$ 在 $P_0$ 的餘集 $G_0$ 上有了意義，它在 $G_0$ 的每一個構成區間上是常數，但總的說來在 $G_0$ 上是一增加函數。在 $P_0$ 上，補充$\Theta(x)$ 的定義如下：

$$\Theta(0)=0,\ \Theta(1)=1.$$

對於介乎 0 與 1 之間的 $P_0$ 中的點 $x_0$，則令

$$\Theta(x_0)=\sup\{\Theta(x)\} \qquad (x\in G_0, x<x_0).$$

這樣，$\Theta(x)$ 是在整個閉區間 $[0,1]$ 上定義的一個單調增加函數。

我們還可以證明，$\Theta(x)$ 是一個連續函數。因爲 $\Theta(x)$ 在 $G_0$ 上所取函數值已經在 $[0,1]$ 中處處稠密。如果增加函數 $\Theta(x)$ 在 $x_0$ 有一不連續點，則 $(\Theta(x_0-0),\Theta(x_0))$ 或 $(\Theta(x_0),\Theta(x_0+0))$ 的一切數就不是 $\Theta(x)$ 的函數值，這是與稠密性相抵觸的。所以 $\Theta(x)$ 是一連續的增加函數，並且 $\Theta'(x)$ 幾乎處處等於 0（在 $G_0$ 中每點當然是 $\Theta'(x)=0$）。因此，

$$\int_0^1 \Theta'(x)dx=0<1=\Theta(1)-\Theta(0).$$

以後我們還要建立使(3)中等號成立的條件。

在這裏，我們證明一個很有用處的定理。

**定理 6** 設 $E$ 是 $[a,b]$ 中測度爲零的集，那末一定存在着連續增加函數 $\sigma(x)$，使

$$\sigma'(x)=+\infty$$

在點集 $E$ 上處處成立。

**證明** 對於每一個自然數 $n$ 作一有界開集 $G_n$ 使

$$G_n\supset E, \quad mG_n<\frac{1}{2^n}.$$

我們置

$$\psi_n(x)=m\{G_n[a,x]\}.$$

那末 $\psi_n(x)$ 是一決不取負値的增加連續函數。因

$$0\leqslant\psi_n(x)<\frac{1}{2^n},$$

所以函數

$$\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$$

也是一個不取負値的增加連續函數。

設 $x_0\in E$, 則當 $|h|$ 適當小時，$[x_0,x_0+h]$ 完全含在 $G_n$ 之中 [固定 $n$]。對於此種 $h$ (爲簡單計，不妨設 $h>0$)，我們得到

$$\psi_n(x_0+h)=m\{G_n\cdot[a,x_0]+G_n\cdot(x_0,x_0+h]\}=\psi_n(x_0)+h,$$

從而

$$\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=1.$$

但是不論什麼自然數 $N$, 當 $|h|$ 適當小時，

$$\frac{\sigma(x_0+h)-\sigma(x_0)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=N,$$

由此得到

$$\sigma'(x_0)=+\infty.$$

定理證畢。

## §3　有界變差的函數

在本節中要講一類非常重要的函數，即所謂有界變差函數，這種函數是與單調函數有密切關係的。

設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定義的有限函數。在 $[a,b]$ 中作如下的分點

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

且作如下的和

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

**定義** 稱 $V$ 的上確界爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全變差，記作 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$。當

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)<+\infty$$

時，稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界變差的。

**定理 1** 單調函數是有界變差的。

本定理，就增加函數來證明就夠了。設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一增加函數，那末 $f(x_{k+1})-f(x_k)$ 不是負的。從

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}=f(b)-f(a),$$

得到定理的證明。

滿足李普西茲條件的函數是有界變差函數的又一例子：

**定義 2** 在 $[a,b]$ 上所定義的有限函數 $f(x)$，如果有常數 $K$ 常使不等式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$$

對於 $[a, b]$ 中任何兩點 $x, y$ 成立，稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上滿足李普西茲條件。

假如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中具有有界的導函數 $f'(x)$，那末由蘭格倫日的公式：

$$f(x)-f(y)=f'(z)(x-y) \qquad (x<z<y),$$

即知 $f(x)$ 是滿足李普西茲條件的。

假如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 滿足李普西茲條件，則

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant K(x_{k+1}-x_k).$$

從而

$$V\leqslant K(b-a),$$

所以 $f(x)$ 是一有界變差的函數。

連續函數的全變差可以是無窮大，例如

$$f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x}(0<x\leqslant 1),\ f(0)=0.$$

如果在 [0, 1] 中採取分點

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

那末容易證明

$$V=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

從而得到

$$\bigvee_0^1(f)=+\infty.$$

**定理 2** 有界變差函數是有界的。

事實上，對於 $a\leqslant x\leqslant b$,

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

從而得到

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\bigvee_a^b(f).$$

**定理 3** 兩個有界變差函數之和、差、積仍爲有界變差函數。

**證明** 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是兩個有界變差函數。置 $s(x)=f(x)+g(x)$, 則

$$|s(x_{k+1})-s(x_k)|\leqslant|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|.$$

從而

$$\bigvee_a^b (s) \leqslant \bigvee_a^b (f) + \bigvee_a^b (g).$$

所以 $s(x)$ 是有界變差的函數。同樣可證 $f(x)-g(x)$ 是有界變差。

其次設 $p(x)=f(x)g(x)$。置

$$A=\sup\{|f(x)|\},\ B=\sup\{|g(x)|\},$$

則

$$|p(x_{k+1})-p(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1})g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_{k+1})| + |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \leqslant B|f(x_{k+1})-f(x_k)| + A|g(x_{k+1})-g(x_k)|.$$

從而

$$\bigvee_a^b (p) \leqslant B\bigvee_a^b (f) + A\bigvee_a^b (g),$$

所以 $f(x)g(x)$ 也是有界變差。

**定理 4** 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是有界變差。若 $|g(x)| \geqslant \sigma > 0$, 則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是有界變差。

證明留給讀者。

**定理 5** 設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函數，又 $a<c<b$, 則

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f). \tag{1}$$

**證明** 設在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 中各各插入分點:

$$y_0=a<y_1<\cdots<y_m=c,\ z_0=c<z_1<\cdots<z_n=b,$$

又作

$$V_1=\sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1})-f(y_k)|, \qquad V_2=\sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1})-f(z_k)|.$$

分點 $\{y_k\}$ 和 $\{z_k\}$ 也是 $[a,b]$ 的分點，對於這個分法所對應的和

記之爲 $V$，則

$$V=V_1+V_2.$$

由此立即可得

$$V_1+V_2\leqslant \bigvee_a^b(f).$$

因此得到不等式

$$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f). \tag{2}$$

又 $[a,b]$ 中所插入的分點

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$$

中假設有一點是 $c$。設 $c=x_m$，則對於這個分法所對應的和 $V$，

$$V=\sum_{k=0}^{m-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum_{k=m}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$$

$$=V_1+V_2,$$

此處 $V_1$ 與 $V_2$ 是對應於 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 的和。由是

$$V\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f) \tag{3}$$

上述不等式只有對於這種分法，其分點含有 $c$ 點者已證是成立的。實際上，不等式 (3) 對於一般的分法都是成立的，因爲在分點中添加一個新的分點時所對應的和不會減少。所以由(3)得着

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f) \tag{4}$$

由(2)與(4)，乃得(1)。

**系 1** 設 $a<c<b$。如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲有界變差，則 $f(x)$ 在

$[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上亦爲有界變差。其逆亦眞。

**系 2** 若 $[a, b]$ 可分爲有限個子閉區間，在每一子閉區間中 $f(x)$ 成爲單調函數，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界變差。

**定理 6** 函數 $f(x)$ 是有界變差的必要且充分條件是 $f(x)$ 可以表示爲兩個增加函數的差。

**證明** 其充分性由定理 1 與定理 3 卽知。爲了證明其必要性，置

$$\pi(x) = \bigvee_a^x (f) \qquad (a < x \leqslant b)$$

$$\pi(a) = 0.$$

由定理 5, $\pi(x)$ 是一增加函數。置

$$\nu(x) = \pi(x) - f(x), \tag{5}$$

則可證 $\nu(x)$ 也是增加函數。事實上，當 $a \leqslant x < y \leqslant b$ 時，由定理 5,

$$\nu(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + \bigvee_x^y (f) - f(y).$$

所以

$$\nu(y) - \nu(x) = \bigvee_x^y (f) - [f(y) - f(x)].$$

但是由全變差的定義，

$$f(y) - f(x) \leqslant \bigvee_x^y (f),$$

所以得到

$$\nu(y) - \nu(x) \geqslant 0,$$

因此 $\nu(x)$ 是一增加函數。由(5)式乃得

$$f(x) = \pi(x) - \nu(x),$$

這是所要的表示式子。

**系 1**　如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界變差，則 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上幾乎處處存在且爲有限，並且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上是$(L)$可積的。

**系 2**　有界變差函數的不連續點的全體是一可列點集。在每一個不連續點 $x_0$ 存在着如下的極限

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad (x>x_0)$$

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad (x<x_0).$$

設

$$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots (a<x_n<b) \tag{6}$$

是 $\pi(x)$ 或 $\nu(x)$ 之不連續點的全體。作函數（跳躍函數）

$$s_\pi(x)=[\pi(a+0)-\pi(a)]+\sum_{x_k<x}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+$$
$$+[\pi(x)-\pi(x-0)] \qquad (a<x\leqslant b)$$

$$s_\nu(x)=[\nu(a+0)-\nu(a)]+\sum_{x_k<x}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)]+$$
$$+[\nu(x)-\nu(x-0)]$$

$$s_\pi(a)=s_\nu(a)=0.$$

（如果 $x_k$ 是 $\pi(x)$ 或 $\nu(x)$ 的連續點，那末 $x_k$ 所對應的一項就化爲 0。並且可以指出，$\nu(x)$ 的不連續點不可能是 $\pi(x)$ 的連續點，於此不擬詳述。）

設

$$s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x),$$

則

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(x)-f(x-0)] \qquad (a<x\leqslant b)$$

$$s(a)=0.$$

$s(x)$ 也是一個有界變差函數，稱爲 $f(x)$ 的跳躍函數。顯然的，如果從(6)除去 $f(x)$ 的連續點，則 $s(x)$ 仍舊沒有什麽改變。所以我們不妨假設(6)中一切點都是 $f(x)$ 的不連續點。

我們在 §1 定理 2 中已知

$$\pi(x)-s_\pi(x) \text{ 和 } \nu(x)-s_\nu(x)$$

都是連續的增加函數。由是

$$\varphi(x)=f(x)-s(x)$$

是一連續的有界變差函數，換言之：

**定理 7** 從一個有界變差函數減去它的跳躍函數，變成一個連續的有界變差函數。

## §4 赫利的選擇原理

在本節中我們要講一個在應用上很重要的定理，就是赫利的定理。首先我們證明兩個補助定理。

**補助定理 1** 設在 $[a,b]$ 上定義着無限個的函數 $H=\{f(x)\}$。如果有常數 $K$，使

$$|f(x)|\leqslant K \tag{1}$$

對於 $H$ 中一切函數成立(或稱作：$H$ 中一切函數是一致有界的)，那末對於 $[a, b]$ 中任何一個可列集 $E$，從函數族 $H$ 中可以選出一列函數 $\{f_n(x)\}$，使在 $E$ 中每點收斂。

**證明** 設 $E=\{x_k\}$。函數族 $H$ 在點 $x_1$ 所取函數值的全體

$$\{f(x_1)\},$$

由(1)式，是一有界集。所以由波爾采諾-伐爾斯脫勞司定理，其中存在着一個收斂子數列：

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \cdots\cdots, \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1)=A_1. \tag{2}$$

函數列 $\{f_n^{(1)}(x)\}$ 在 $x_2$ 所取值的數列

$$f_1^{(1)}(x_2), f_2^{(1)}(x_2), f_3^{(1)}(x_2), \cdots\cdots$$

也是有界的。所以在 $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ 中又可選取一個收斂的子數列

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \cdots\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2. \tag{3}$$

所當注意的是：(3)式中任何兩個函數 $f_n^{(2)}, f_m^{(2)}$ 間的次序與原來在 (2) 式中相同。

將此手續繼續施行，乃得可列無限個的收斂數列：

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \cdots\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1.$$

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \cdots\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), f_3^{(k)}(x_k), \cdots\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) = A_k.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

並且每一個後排的函數列是前排的子函數列（選取子列時元素前後次序不打亂）。

現在我們從上面的行列取其在對角線上的函數列

$$\{f_n^{(n)}(x)\}. \qquad (n=1,2,\cdots\cdots).$$

這個函數列正是我們所要的。就是說，它在 $E$ 中每一點是收斂的，事實上，對於任意一個固定的 $k$,

$$\{f_n^{(n)}(x_k)\} \qquad (n \geqslant k)$$

乃爲 $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$ 的子數列，所以必定收斂於 $A_k$。因此，補助定理 1 證畢。

**補助定理 2**　設在 $[a, b]$ 上定義着無限個增加函數 $F=\{f(x)\}$。假如 $F$ 中一切函數是一致有界的：

$$|f(x)| \leqslant K,$$

那末從$F$可以選出函數列$\{f_n(x)\}$,使在$[a,b]$上收斂,且其極限函數$\varphi(x)$也是一個增加函數。

**證明** 應用補助定理1於$F$,取$E$爲$[a,b]$中一切有理點加上點$a$(如$a$已經是有理數,那就不必說了)。從$F$中可以選取函數列

$$F_0=\{f^{(n)}(x)\},$$

使在$E$中任何點$x_k$,存在着有限的極限

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k). \tag{4}$$

現在定義如下的函數$\psi(x)$,當$x_k\in E$時,

$$\psi(x_k)=\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k).$$

函數$\psi(x)$僅在$E$上有意義,在$E$上,$\psi(x)$是一增加函數。就是說:當$x_k$和$x_i$都屬於$E$,且$x_k<x_i$時,

$$\psi(x_k)\leqslant\psi(x_i).$$

在$[a,b]$中其他的點,即在$(a,b]$中的無理點$x$,則定

$$\psi(x)=\sup_{x_k<x}\{\psi(x_k)\} \qquad (x_k\in E).$$

於是$\psi(x)$乃爲$[a,b]$上的一個增加函數,$\psi(x)$的不連續點的全體$Q$至多是可列的。

現在可以證明,在$\psi(x)$的每一個連續點$x_0$成立着

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0)=\psi(x_0).$$

事實上,對於任意的正數$\varepsilon$,可以找到$E$中的點$x_k$和$x_i$使

$$x_k<x_0<x_i,\ \psi(x_i)-\psi(x_k)<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立。固定這些點,然後取$n_0$使當$n>n_0$時,

$$|f^{(n)}(x_k)-\psi(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f^{(n)}(x_i)-\psi(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

易知對於這些$n$,成立着

$$\psi(x_0)-\varepsilon<f^{(n)}(x_k)\leqslant f^{(n)}(x_i)<\psi(x_0)+\varepsilon,$$

又因

$$f^{(n)}(x_k)\leqslant f^{(n)}(x_0)\leqslant f^{(n)}(x_i),$$

所以當 $n>n_0$ 時成立着

$$\psi(x_0)-\varepsilon<f^{(n)}(x_0)<\psi(x_0)+\varepsilon,$$

因此得到(5)。

於是等式

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=\psi(x) \tag{6}$$

只有對於 $\psi(x)$ 的不連續點（其全體記作 $Q$，至多是一可列集）可能不成立。

然後我們再應用補助定理 1 於 $F_0$，把 $Q$ 當作補助定理 1 中的 $E$。因此可以在 $F_0=\{f^{(n)}(x)\}$ 中選取一列 $\{f_n(x)\}$ 使得對於 $Q$ 中的點都具有有限的極限。於是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 中各點都收斂於有限數。極限函數

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

是一增加函數。

**定理**(赫利) 設在 $[a, b]$ 上定義着無限個有界變差的函數 $F=\{f(x)\}$。如果有常數 $K$，使

$$|f(x)|\leqslant K, \bigvee_a^b(f)\leqslant K$$

對於 $F$ 中一切函數成立，那末從 $F$ 中可以選出在 $[a,b]$ 上處處收斂的函數列 $\{f_n(x)\}$，其極限函數 $\varphi(x)$ 也是有界變差。

**證明** 設 $f(x)\in F$。置

$$\pi(x)=\bigvee_a^x(f), \ \nu(x)=\pi(x)-f(x).$$

$\pi(x)$ 與 $\nu(x)$ 都是增加函數，它們是

$$|\pi(x)|\leqslant K,\ |\nu(x)|\leqslant 2K.$$

應用補助定理 2 於 $\{\pi(x)\}$，$\{\pi(x)\}$ 中有收斂函數列 $\{\pi_k(x)\}$：

$$\lim_{k\to\infty}\pi_k(x)=\alpha(x).$$

設 $\pi_k(x)=\bigvee_a^x(f_k)$，那末對於每一個 $\pi_k(x)$ 有 $\nu_k(x)=\pi_k(x)-f_k(x)$ 與之對應。再應用補助定理 2 於 $\{\nu_k(x)\}$，得着收斂函數列 $\{\nu_{k_i}(x)\}$：

$$\lim_{i\to\infty}\nu_{k_i}(x)=\beta(x).$$

因此得到$F$中的一個收斂函數列

$$f_{k_i}(x)=\pi_{k_i}(x)-\nu_{k_i}(x),$$

其極限函數

$$\varphi(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

是兩個增加函數之差，所以是有界變差的函數。

定理證畢。

## § 5 有界變差的連續函數

**定理 1** 設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上定義的有界變差函數。如果 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 之一連續點，則 $x=x_0$ 也是

$$\pi(x)=\bigvee_a^x(f)$$

的連續點。

**證明** 設 $x_0<b$。先證 $\pi(x)$ 在 $x_0$ 是右方連續的。對於任一正數 $\varepsilon$，在 $[x_0,b]$ 中作如下的分點

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|>\bigvee_{x_0}^{b}(f)-\varepsilon. \tag{1}$$

因爲加入新的分點，決不減少 $V$，所以不妨假定

$$|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由(1)，

$$\bigvee_{x_0}^{b}(f)<\varepsilon+\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|<2\varepsilon+\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon+\bigvee_{x_1}^{b}(f).$$

因此，

$$\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)<2\varepsilon,$$

$$\pi(x_1)-\pi(x_0)<2\varepsilon.$$

故

$$\pi(x_0+0)-\pi(x_0)<2\varepsilon.$$

但因 $\varepsilon$ 是任意的正數，所以

$$\pi(x_0+0)=\pi(x_0).$$

設 $x_0>a$，同樣可以證明 $\pi(x_0-0)=\pi(x_0)$。

系　有界變差的連續函數可用兩個連續的增加函數之差來表示。

事實上，設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一連續的有界變差函數，則

$$\pi(x)=\bigvee_{a}^{x}(f),\quad \nu(x)=\pi(x)-f(x)$$

是兩個連續的增加函數。

設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上定義的連續函數。在 $[a,b]$ 中插入分點：

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\quad [\max(x_{k+1}-x_k)=\lambda],$$

作和

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|,\quad \Omega=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k,$$

此處 $\omega_k$ 表示 $f(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的振幅。

**定理2** 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續。如果 $\lambda\to 0$, 則上述之 $V$ 和 $\Omega$ 都趨近於 $f(x)$ 的全變差 $\bigvee\limits_a^b(f)$。

(此地並沒有假定 $f(x)$ 是有界變差。不過所述僅限於連續函數有效。例如在 $[-1, +1]$ 上定義的如下的函數 $f(x)$：$f(0)=1$, $f(x)=0$ $(x\neq 0)$。則 $\bigvee\limits_{-1}^{+1}(f)=2$,但對於 $[-1,+1]$ 中任何一個分法而不以 0 爲分點的話,則 $V=0$, $\Omega=1$)

**證明** 當分點加多時, $V$ 決不減少。另一方面,於 $(x_k, x_{k+1})$ 中添加一個新的分點,則 $V$ 的增加不會超過 $f(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的振幅的兩倍。

取任何一數 $A<\bigvee\limits_a^b(f)$, 又作一個和

$$V^*>A.$$

假設此地的和 $V^*$ 是對應於下面的分點

$$x_0^*=a<x_1^*<x_2^*<\cdots<x_m^*=b.$$

取正數 $\delta$ 甚小,使當 $|x''-x'|<\delta$ 時,

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{V^*-A}{4m}.$$

那末,當 $\lambda<\delta$ 時,

$$V>A. \tag{2}$$

事實上,有了分法(I)之後,我們造一個新的分法(II),(II)是由(I)

加上分點 $\{x_k^*\}$ 而成。假設對於分法(II)所對應的和是 $V_0$，則

$$V_0 \geqslant V^*. \tag{3}$$

另一方面，分法(II)也可從(I)每次增加一個分點，共增 $m$ 次而得。而對於每一分點之添加，$V$ 之增量小於 $\frac{V^*-A}{2m}$，所以

$$V_0 - V < \frac{V^*-A}{2}.$$

將此式與(3)聯繫，乃得

$$V > V_0 - \frac{V^*-A}{2} \geqslant \frac{A+V^*}{2} > A.$$

因此，知道當 $\lambda<\delta$ 時(2)式必成立，但因關係 $V \leqslant \bigvee_a^b(f)$ 是常成立的，所以與(2)式合併，即得

$$\lim_{\lambda\to 0} V = \bigvee_a^b(f).$$

現在已經不難證明關於 $\Omega$ 方面的事情了。一方面顯然是

$$\Omega \geqslant V. \tag{4}$$

如果對於某種分法，已得對應的 $\Omega$，然後加入新的分點，使在新分點上，函數取下面的數值:

$$m_k = \min\{f(x)\},\ M_k = \max\{f(x)\} \quad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}),$$

則對於加入新的點以後的分法而言，其所對應的 $V'$ 就不小於 $\Omega$，由是

$$\Omega \leqslant \bigvee_a^b(f). \tag{5}$$

由(4)和(5)，乃得

$$\lim_{\lambda\to 0} \Omega = \bigvee_a^b(f).$$

定理 2 證畢。

巴拿哈將上述定理用到連續的有界變差函數上去,得到一個非常有趣的結果。

設$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的。又設

$$m=\min\{f(x)\},\quad M=\max\{f(x)\}.$$

今於 $[m, M]$ 上定義如下的函數 $N(y)$: 設 $m\leqslant y\leqslant M$, $N(y)$ 是方程

$$f(x)=y$$

的根的個數。如果對於某 $y$, 根有無限多個,則定義

$$N(y)=+\infty.$$

稱函數 $N(y)$ 爲巴拿哈的指示函數。

**定理 3**(巴拿哈) 巴拿哈的指示函數是可測的,且

$$\int_m^M N(y)d_y=\bigvee_a^b(f).$$

**證明** 將 $[a, b]$ 分成 $2^n$ 等分,置

$$d_1=\left[a, a+\frac{b-a}{2^n}\right]$$

$$d_k=\left(a+(k-1)\frac{b-a}{2^n},\ a+k\cdot\frac{b-a}{2^n}\right]\qquad (k=2,3,\cdots,2^n).$$

又作如下的函數 $L_k(y)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,2^n)$: 如果

$$f(x)=y \tag{6}$$

在區間 $d_k$ 中至少有一個根, 定 $L_k(y)=1$; 如果在 $d_k$ 中方程 $f(x)=y$ 沒有根, 則定 $L_k(y)=0$。設$f(x)$ 在$d_k$ 的上確界下確界爲 $m_k, M_k$, 則 $L_k(y)$ 在 $(m_k, M_k)$ 中等於 1, 而在 $[m_k, M_k]$ 之外乃爲 0, 因此函數 $L_k(y)$ 頂多只有兩個不連續點,所以是可測函數。現在

$$\int_m^M L_k(y)d_y=M_k-m_k=\omega_k,$$

$\omega_k$ 表示 $f(x)$ 在閉區間 $\bar{d}_k$ 上的振幅,

最後,我們作函數

$$N_n(y)=L_1(y)+L_2(y)+\cdots+L_{2^n}(y),$$

對於那些含有方程(6)的根的區間 $d_k$ 來講, $N_n(y)$ 剛好表示這種 $d_k$ 的個數。顯然, $N_n(y)$ 是一個可測函數,並且成立

$$\int_m^M N_n(y)dy=\sum_{k=1}^{2^n}\omega_k,$$

所以由定理 2，乃得

$$\lim_{n\to\infty}\int_m^M N_n(y)dy=\bigvee_a^b(f).$$

因爲

$$N_1(y)\leqslant N_2(y)\leqslant N_3(y)\leqslant\cdots\cdots,$$

所以極限

$$N^*(y)=\lim_{n\to\infty}N_n(y)$$

是存在的(有限或無限)。$N^*(y)$ 是一可測函數。由第六章 §1 中的勒維定理，

$$\int_m^M N^*(y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_m^M N_n(y)dy=\bigvee_a^b(f).$$

如果我們能夠證得

$$N^*(y)=N(y), \tag{7}$$

那末定理完全證畢。

從

$$N_n(y)\leqslant N(y),$$

得到

$$N^*(y)\leqslant N(y). \tag{8}$$

設 $q$ 是不大於 $N(y)$ 的自然數。那末可以找到方程(6)的 $q$ 個兩兩相異的根：

$$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_q.$$

取 $n$ 甚大使

$$\frac{b-a}{2^n}<\min(x_{k+1}-x_k),$$

那末 $q$ 個根 $x_k$ 各各在不同的 $d_k$ 中，因此

$$N_n(y)\geqslant q.$$

從而得到

$$N^*(y)\geqslant q \tag{9}$$

當 $N(y)=+\infty$ 時，可取 $q$ 任意的大，因此亦得 $N^*(y)=+\infty$. 如果 $N(y)$ 爲有限，

則可以取 $q=N(y)$, 而 (9) 式變成

$$N^*(y)\geqslant N(y).$$

再由(8)式卽得(7)式。

系 1 連續函數$f(x)$爲有界變差的必要且充分條件是: $f(x)$ 的巴拿哈指示函數 $N(y)$ 爲一 $(L)$ 可積函數。

系 2 設 $f(x)$ 是一連續的有界變差函數,那末使方程 $f(x)=y$ 具有無限個根的 $y$, 其全體成一測度爲零的集(在 $y$ 軸上)。

事實上,此時巴拿哈指示函數旣爲$(L)$可積,所以是幾乎處處爲有限。

## § 6 司帝階積分

此地我們要講黎曼積分的一個非常重要的擴充,就是司帝階積分。

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的兩個有限函數。於$[a, b]$ 中插入分點

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

又在每一個子區間 $[x_k, x_{k+1}]$ 中任取一點 $\xi_k$ 而作和

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)].$$

如果當

$$\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)\to 0$$

時,不論分法如何,也不論點 $\xi_k$ 的取法如何,$\sigma$ 常趨於同一個有限的極限 I, 則稱此極限 I 爲 $f(x)$ 關於 $g(x)$ 的司帝階積分,而用記號

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ 或是} (S) \int_a^b f(x)dg(x)$$

表示 $I$。

詳細說: 對於任一正數 $\varepsilon$, 有如下的正數 $\delta$, 如果當 $\lambda<\delta$ 時,不管分法如何,$\xi_k$ 的取法如何,不等式

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

成立的話，那末稱 $I$ 爲 $f(x)$ 關於 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的司帝階積分。

當 $g(x)=x$ 時，司帝階積分就是黎曼積分。

司帝階積分具有下面幾種顯而易見的性質：

1. $$\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)]dg(x)=\int_a^b f_1(x)dg(x)+\int_a^b f_2(x)dg(x).$$

2. $$\int_a^b f(x)d[g_1(x)+g_2(x)]=\int_a^b f(x)dg_1(x)+\int_a^b f(x)dg_2(x).$$

3. 假如 $k$ 與 $l$ 是兩個常數，則

$$\int_a^b kf(x)dlg(x)=kl\int_a^b f(x)dg(x).$$

上面三式之意是：當右邊存在時，則左邊也存在，且兩邊相等。

4. 當 $a<c<b$ 時，下面三個積分都存在的話，那末等式

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

成立。

爲了證明這個性質的成立，只要在作和 $\sigma$ 時，取 $c$ 爲 $[a,b]$ 的分點就行了。

由 $\int_a^b fdg$ 的存在，不難證明 $\int_a^c fdg$ 和 $\int_c^b fdq$ 也都存在。但其逆不眞，舉例於下：

**例**　設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $[-1,+1]$ 上定義的兩個函數：

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-1\leqslant x\leqslant 0)\\ 1 & (0<x\leqslant 1),\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0 & (-1\leqslant x<0)\\ 1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\end{cases}$$

則

$$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x), \int_{0}^{1} f(x)dg(x)$$

均存在,其值均為 0 (因為 $\sigma=0$)。但是積分

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dg(x)$$

並不存在。事實上,如果對於 $[-1, +1]$ 的分法而不取 0 為分點的話,那末必有如下的 $i$: $x_i<0<x_{i+1}$。於是

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]$$

中只有第 $i$ 項等於 $f(\xi_i)$, 而其餘各項均為 0 (因 $x_k, x_{k+1}$ 都在 0 的一邊)。所以

$$\sigma=f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]=f(\xi_i).$$

因 $\xi_i\leqslant 0$ 或 $\xi_i>0$ 而得

$$\sigma=0 \text{ 或 } \sigma=1,$$

由是, $\sigma$ 的極限不存在。

5. 若 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 與 $\int_a^b g(x)df(x)$ 中有一個積分存在, 則另一個積分也存在,兩積分之間,成立着下面的等式:

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=[f(x)g(x)]_a^b. \tag{1}$$

此地

$$[f(x)g(x)]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a). \tag{2}$$

稱公式(1)爲部分積分的公式。

要證明(1)，假設積分$\int_a^b g(x)df(x)$存在。於$[a,b]$插入分點$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$。設$x_k\leqslant\xi_k\leqslant x_{k+1}$，置

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)].$$

則

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)g(x_{k+1})-\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)g(x_k)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})]+f(\xi_{n-1})g(x_n)-f(\xi_0)g(x_0).$$

利用(2)式，得

$$\sigma=[f(x)g(x)]_a^b-$$

$$-\left\{g(a)[f(\xi_0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})]+\right.$$

$$\left.+g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\right\},$$

括弧{ }內的式子剛好是對應於積分$\int_a^b g(x)df(x)$的和，事實上，其分點就是

$$a\leqslant\xi_0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_{n-1}\leqslant b,$$

而$a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},b$順次是$[a,\xi_0],[\xi_0,\xi_1],\cdots,[\xi_{n-1},b]$中的點。

當$\max(x_{k+1}-x_k)$趨近於0時，

$$\max(\xi_{k+1}-\xi_k)$$

也趨近於0，因此括弧{ }內的和趨近於$\int_a^b gdf$。由是得(1)。

關於司帝階積分的存在條件，我們在此地只講一個定理。

**定理 1**　如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續的，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界變差，則 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在。

**證明**　因爲有界變差的函數可用兩個增加函數的差來表示，所以此地不妨設 $g(x)$ 是一增加函數。

設 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，又記 $f(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 之最小值與最大值爲 $m_k$ 與 $M_k$。置

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k[g(x_{k+1})-g(x_k)],\quad S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k[g(x_{k+1})-g(x_k)],$$

則在 $[x_k, x_{k+1}]$ 中取點 $\xi_k$ 時，所作成的 $\sigma$ 適合

$$s\leqslant\sigma\leqslant S. \tag{3}$$

易知當添加分點時，$s$ 不減少而 $S$ 不增加。由是不論怎麼樣的 $s$ 決不會超過一個 $S$。事實上，假設對於 $[a,b]$ 作分法 I 與 II 時，對於 I 的和爲 $s_1$ 及 $S_1$，對於分法 II 的和爲 $s_2$ 及 $S_2$。今合併 I 和 II 的分點，作第三個分法 III。對於 III 作和 $s_3$ 及 $S_3$，則

$$s_1\leqslant s_3\leqslant S_3\leqslant S_2.$$

因此，$s_1\leqslant S_2$。

假設所有 $s$ 的上確界是 $I$：

$$I=\sup\{s\},$$

那末

$$s\leqslant I\leqslant S,$$

因此，由(3)得

$$|\sigma-I|\leqslant S-s.$$

對於任意的正數 $\varepsilon$，必有正數 $\delta$，當 $|x''-x'|<\delta$ 時，不等式 $|f(x'')$

$-f(x')|<\varepsilon$ 成立。因此，當 $\lambda<\delta$ 時，

$$M_k-m_k<\varepsilon \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

由是

$$S-s<\varepsilon[g(b)-g(a)].$$

所以當 $\lambda<\delta$ 時，

$$|\sigma-I|<\varepsilon[g(b)-g(a)].$$

此即表示

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I.$$

故得 $I=\int_a^b f(x)dg(x)$。定理證畢。

由此定理，可知有界變差函數關於連續函數的司帝階積分也是存在的。

關於司帝階積分的計算將於第九章 § 6 再說。於此我們光是考慮兩個簡單的情形。

**定理 2**　設在 $[a,b]$ 中 $f(x)$ 是連續的，$g(x)$ 是處處可以微分的，則當 $g'(x)$ 爲 (R) 可積時，

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{4}$$

**證明**　在所設條件下，$g(x)$ 滿足李普西茲條件，所以是一有界變差函數。因此(4)式左邊的積分存在。另一方面，因 $g'(x)$ 是幾乎處處連續，所以 $f(x)g'(x)$ 是幾乎處處連續，所以(4)式右邊的積分存在。現在證明(4)的兩邊相等。

設

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

對於 $g(x_{k+1})-g(x_k)$ 用蘭格倫日公式，

$$g(x_{k+1})-g(x_k)=g'(\bar{x}_k)(x_{k+1}-x_k) \quad (x_k<\bar{x}_k<x_{k+1}).$$

利用這些點 $\bar{x}_k$，對於積分 $\int_a^b f dg$，作如下的 $\sigma$:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)g'(\bar{x}_k)(x_{k+1}-x_k),$$

這是函數 $f(x)g'(x)$ 的一個黎曼和。將分點加密取極限即得等式 (4)。

**定理 3** 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續的。設

$$c_0=a<c_1<c_2<\cdots<c_m<b=c_{m+1}.$$

若 $g(x)$ 在區間 $(c_0,c_1),(c_1,c_2),\cdots,(c_{m-1},c_m),(c_m,c_{m+1})$ 中取常數值，則

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)]. \quad (5)$$

**證明** 因

$$\bigvee_a^b(g)=|g(a+0)-g(a)|+\sum_{k=1}^{m}\{|g(c_k)-g(c_k-0)|+|g(c_k+0)$$

$$-g(c_k)|\}+|g(b)-g(b-0)|,$$

所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一有界變差的函數，因而在 $[a,b]$ 的每個子區間上也是有界變差。因此，等式

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=0}^{m}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) \quad (6)$$

成立。

剩下來的事情是在計算積分 $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$。於 $[c_k,c_{k+1}]$ 插入分點

$c_k=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{n-1}<\xi_n=c_{k+1}$，作成所對應的和

$$\sigma=f(\xi_0)[g(c_k+0)-g(c_k)]+f(\xi_{n-1})[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)],$$

因爲別的項都等於0。取極限時，卽得

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)=f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k)]+f(c_{k+1})[g(c_{k+1})-$$
$$-g(c_{k+1}-0)],$$

以之代入(6)式，卽得(5)。

## §7　在司帝階積分號下取極限

**定理1**　設在$[a,b]$上$f(x)$是連續的，$g(x)$是有界變差，那末

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right|\leqslant M(f)\cdot \mathop{V}_a^b(g), \tag{1}$$

其中$M(f)=\max|f(x)|$.

**證明**　對於$[a,b]$的任意分法$x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$及$[x_k,x_{k+1}]$中任意的$\xi_k$,

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right|\leqslant$$
$$\leqslant M(f)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\leqslant M(f)\cdot\mathop{V}_a^b(g).$$

由是得(1)。

**定理2**　設$g(x)$是在$[a,b]$上的有界變差函數，而$\{f_n(x)\}$是在$[a,b]$上的連續函數列，一致收斂於(連續)函數$f(x)$，則

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

**證明** 置

$$M(f_n-f)=\max|f_n(x)-f(x)|.$$

則由(1),

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|\leqslant M(f_n-f)\cdot \bigvee_a^b(g).$$

從假設

$$M(f_n-f)\to 0,$$

即得所要的等式。

**定理 3**(赫利) 設 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的連續函數，在 $[a,b]$ 上 $g_n(x)$ 收斂於有限函數 $g(x)$。假如對於所有的 $n$,

$$\bigvee_a^b(g_n)<K,$$

那末

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{2}$$

**證明** 首先證明

$$\bigvee_a^b(g)\leqslant K, \tag{3}$$

此即表示極限函數 $g(x)$ 也是有界變差。事實上，從

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)|<K \qquad (n=1,2,3,\cdot)$$

即得(令 $n\to\infty$)

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\leqslant K,$$

從而得到(3)。

對於任一正數 $\varepsilon$, 於 $[a,b]$ 中插入如下的分點 $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots,m)$

使 $f(x)$ 在每一個小區間 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的振幅都小於 $\frac{\varepsilon}{3K}$。那末

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]dg(x)+\sum_{k=0}^{m-1}f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}dg(x),$$

但

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}dg(x)=g(x_{k+1})-g(x_k).$$

另一方面，對於 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的任何點 $x$，成立着

$$|f(x)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{3K},$$

因此

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]dg(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3K}\mathop{\mathrm{V}}_{x_k}^{x_{k+1}}(g),$$

所以

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]dg(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3K}\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

於是得到

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=0}^{m-1}f(x_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]+\theta\frac{\varepsilon}{3}\quad(|\theta|\leqslant 1).$$

同理可得

$$\int_a^b f(x)dg_n(x)=\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)]+\theta_n\frac{\varepsilon}{3}(|\theta_n|\leqslant 1).$$

但當 $n>n_0$ 時,

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)]-\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

因此,當 $n>n_0$ 時,

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon.$$

定理證畢。

利用此定理,當$f(x)$為連續,$g(x)$為有界變差時,要計算 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 的話,可以歸到 $g(x)$ 是一連續函數的情形。

事實上,設 $g(x)$ 為有界變差,作 $g(x)$ 的跳躍函數 $s(x)$:

$$s(x)=[g(a+0)-g(a)]+\sum_{x_k<x}[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+$$
$$+[g(x)-g(x-0)].$$

那末由§3的定理7,將 $g(x)$ 用

$$g(x)=s(x)+\gamma(x)$$

表示時,$\gamma(x)$ 是一個連續的有界變差函數。從而得到

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)ds(x)+\int_a^b f(x)d\gamma(x).$$

今計算 $\int_a^b f(x)ds(x)$ 如下,因為 $g(x)=\pi(x)-\nu(x)$, $\pi(x)$ 與 $\nu(x)$ 都是增加函數。設 $\{x_n\}$ 是 $g(x)$ 的不連續點的全體,則

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)] \text{ 與 } \sum_{k=1}^{\infty}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)]$$

都是收斂的正項級數。再由 $|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\leqslant [\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+[v(x_k+0)-v(x_k-0)]$，因此級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\}$$

是收斂的。作函數 $s_n(x)$：$s_n(a)=0$，當 $a<x\leqslant b$ 時，

$$s_n(x)=[g(a+0)-g(a)]+\sum_{x_k<x}{}'[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+$$
$$+[g(x)-g(x-0)],$$

但是式中的 $k$ 不大於 $n$。

那末容易證明，對於 $[a, b]$ 中每一點 $x$，成立着

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x).$$

另一方面，

$$\bigvee_a^b(s_n)=|g(a+0)-g(a)|+\sum_{k=1}^{n}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+$$
$$+|g(x_k+0)-g(x_k)|\}+|g(b)-g(b-0)|,$$

因此，對於一切 $n$，數列 $\bigvee_a^b(s_n)$ 小於一個定數。

所以由定理 3，得

$$\int_a^b f(x)ds(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)ds_n(x).$$

但是函數 $s_n(x)$ 在區間 $(x_{k-1}, x_k)$ 中取常數，所以從 § 6 的定理 3，

$$\int_a^b f(x)ds_n(x)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=1}^{n}f(x_k)[g(x_k+0)-$$
$$-g(x_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)].$$

(顯然的，$s_n(x)$ 在點 $a, x_1, \cdots, x_n, b$ 之跳躍與 $g(x)$ 在這種點的跳躍相同)。從而

$$\int_a^b f(x)ds(x)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)[g(x_k+0)-$$
$$-g(x_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)],$$

於是積分$\int_a^b f(x)dg(x)$ 的計算，歸結於 $\int_a^b f(x)d\gamma(x)$ 的計算，而$\gamma(x)$是一個連續的有界變差函數。

所可注意的，函數 $g(x)$ 在區間內部的不連續點 $x_k$ 的值 $g(x_k)$ 並不影響於積分$\int_a^b f(x)dg(x)$的值，因爲我們在作和 $\sigma$ 時可以不取 $x_k$ 作分點。

## §8 線性汎函數

設 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定義的有界變差函數。那末對於 $[a, b]$ 上定義的任一連續函數 $f(x)$，就對應着一個數

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{1}$$

這些數滿足下面兩個條件:

1) $\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2)$.

2) $|\Phi(f)|\leqslant KM(f)$，此地 $M(f)=\max|f(x)|$，而 $K=\bigvee_a^b(g)$.

設$C$是 $[a, b]$ 上定義的一切連續函數 $f(x)$ 的全體。若對於 $C$中任一函數 $f$，有數$\Phi(f)$與之對應，並且這些數滿足條件 1) 與 2)，則稱 $\Phi(f)$ 是在 $C$上所定義的線性汎函數。並且可以證明，除了(1)而外，在$C$上不存在其它的線性汎函數。

首先證明，對於$C$上定義的線性汎函數 $\Phi(f)$ 一定滿足

$$\Phi(kf)=k\Phi(f).$$

這個證明可用第七章 §4 的方法完成。

定理(黎斯) 設$C$是在 $[a, b]$ 上定義的一切連續函數 $f(x)$ 所成之集，$\Phi(f)$ 是在

$C$ 上所定義的線性汎函數，那末有一個有界變差的函數 $g(x)$ 使等式

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)dg(x) \tag{1}$$

對於 $C$ 中任何函數 $f(x)$ 成立。

**證明**　我們不妨假設 $a=0$，$b=1$，因爲將變數經過一個一次變換可把 $[a, b]$ 化爲 $[0, 1]$。

在第四章 §5 中曾經講過

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1.$$

當 $x\in[0, 1]$ 時，上式各項都不取負值。因此，當

$$\epsilon_k=\pm 1 \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

時，

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right|\leqslant 1. \tag{2}$$

在 $[0, 1]$ 上定義的連續函數的全體仍記作 $C$，那末對於在 $C$ 上定義的線性汎函數 $\Phi(f)$，有常數 $K$ 適合

$$|\Phi(f)|\leqslant K\cdot M(f).$$

利用(2)式乃得

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k\Phi[C_n^k x^k(1-x)^{n-k}]\right|\leqslant K.$$

如果我們把 $\epsilon_k$ 安排得很好，使在上式左邊的和中，每一項不取負值，那末

$$\sum_{k=0}^{n} |\Phi[C_n^k x^k(1-x)^{n-k}]|\leqslant K. \tag{3}$$

現在我們作如下的梯形函數 $g_n(x)$：

$$g_n(0)=0$$

$$g_n(x)=\Phi[C_n^0x^0(1-x)^{n-0}] \qquad \left(0<x<\frac{1}{n}\right)$$

$$g_n(x)=\Phi[C_n^0x^0(1-x)^{n-0}]+\Phi[C_n^1x^1(1-x)^{n-1}] \qquad \left(\frac{1}{n}\leqslant x<\frac{2}{n}\right)$$

……………………………………………………

……………………………………………………

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi[C_n^k x^k(1-x)^{n-k}] \qquad \left(\frac{n-1}{n}\leqslant x<1\right)$$

$$g_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\Phi[C_n^k x^k(1-x)^{n-k}].$$

由(3),知一切函數 $g_n(x)$ 本身及其全變差都小於定數 $K$。因此由赫利的選擇原理,從函數列 $\{g_n(x)\}$ 中可以選取一個子函數列 $\{g_{n_k}(x)\}$, 使在 $[0, 1]$ 中收斂於一個有界變差的函數 $g(x)$。

如果 $f(x)$ 是在 $[0, 1]$ 上定義的連續函數,則由 § 6 的定理 3,

$$\int_0^1 f(x)dg_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Phi\,[C_n^k x^k(1-x)^{n-k}],$$

從而

$$\int_0^1 f(x)dg_n(x)=\Phi[B_n(x)],$$

此地

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

這是 $f(x)$ 的褒恩斯坦多項式。

由第四章 § 5 的褒恩斯坦定理,

$$M(B_n-f)\to 0,$$

但由線性汎函數的定義,

$$|\Phi(B_n)-\Phi(f)|=|\Phi(B_n-f)|\leqslant K\cdot M(B_n-f).$$

所以當 $n\to\infty$ 時,

$$\Phi(B_n)\to\Phi(f),$$

從而得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dg_n(x)=\Phi(f).$$

但是當 $n$ 經 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots$ 而趨 $+\infty$ 時，由 §7 的赫利定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dg_n(x)=\int_0^1 f(x)dg(x).$$

由是

$$\Phi(f)=\int_0^1 f(x)dg(x).$$

定理證畢。

## 第八章的習題

1. 函數 $f(x)$ 是有界變差的必要且充分條件乃是存在這樣的增加函數 $\varphi(x)$ 使當 $x'<x''$ 時，

$$f(x'')-f(x')<\phi(x'')-\phi(x').$$

2. 設有限函數 $f(2)$ 在 $E$ 中具有導函數 $f'(x)$，且 $|f'(x)|\leqslant K$，則

$$m^*f(E)\leqslant K\cdot m^*E.$$

3. 函數 $f(x)$ 滿足條件 $|f(x'')-f(x')|\leqslant K|x''-x'|^{\alpha}(\alpha>0)$ 時，稱 $f(x)$ 滿足 $\alpha$ 次的李普西茲條件。證明，當 $\alpha>1$ 時 $f(x)\equiv$ 常數。試作一個不滿足任何次李普西茲條件的有界變差函數。又設 $\alpha<1$ 為已給，作一函數滿足 $\alpha$ 次李普西茲條件但有無限的全變差。

4. 如果 $f(x)$ 滿足 $\alpha$ 次李普西茲條件，$g(x)$ 滿足 $\beta$ 次李普西茲條件，則當 $\alpha+\beta>1$ 時，積分 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在(康杜拉里)。

5. 設 $f(x)$ 為連續，$g(x)$ 為有界變差，則 $\int_a^x f(x)dg(x)$ 是一有界變差的函數，此函數在 $g(x)$ 的連續點上是連續的。

6. 對於數列 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$，作 $\Delta^0\mu_n=\mu_n$，$\Delta^{k+1}\mu_n=\Delta^k\mu_n-\Delta^k\mu_{n+1}$。要有增加函數 $g(x)$ 適合

$$\int_0^1 x^n dg(x)=\mu_n \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad (1)$$

的必要且充分條件是對於所有的 $k$ 及 $n$ 下面的式子

$$\Delta^k \mu_n \geqslant 0$$

都成立(豪司道夫)。

7. 承用前題的記號,要有有界變差函數 $g(x)$ 使 (1) 式成立的必要且充分條件是對於所有的 $n$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \,|\, \Delta^{n-k} \mu_k \,| \leqslant K.$$

(豪司道夫)

8. 證明 § 8 的黎斯定理實爲上述豪司道夫定理的一個推論。

9. 如果對於任一正數$\epsilon$,有一個正數$\delta$,當 $|x''-x'|<\delta$ 時,不等式 $|f(x'')-f(x')|<\epsilon$ 對於 $F=\{f(x)\}$ 中一切函數 $f(x)$都成立,則稱$F$是由等度連續函數所成之集。假設有常數 $K$ 使 $|f(x)|\leqslant K$ 對於 $F$ 中任何函數 $f(x)$ 成立,那末在 $F$ 中可以選出一列均勻收斂的函數列(阿爾采拉-阿司可理)。

10. 根據 § 5 的巴拿哈定理,對連續函數證明等式

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f).$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实变函数论　　上册
作者＝那汤松
页数＝２９８
ＳＳ号＝１０２３６６３２
出版日期＝１９５５年０６月第１版

前言
目录